

სპეციალური აღნიშვნები

ქვემოთ გამოყენებული იქნება შემდეგი სტანდარტული აღნიშვნები:

$\mathbb{N}$ - ყველა ნატურალურ (ანუ, მთელ დადებით) რიცხვთა სიმრავლე.

$\mathbb{Z}$ - ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

$\mathbb{Q}$ - ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე.

$\mathbb{R}$ - ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

თუ a და b ისეთი ორი ნამდვილი რიცხვია, რომ $a < b$, მაშინ:

$(a; b)$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული მეტია a -ზე და ნაკლებია b -ზე.

$[a; b]$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული მეტია a -ზე და არ აღემატება b -ს.

$[a; b)$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული არ არის ნაკლები a -ზე და ნაკლებია b -ზე.

$[a; b]$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული არ არის ნაკლები a -ზე და არ აღემატება b -ს.

თუ c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ:

$(-\infty; c)$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული ნაკლებია c -ზე.

$(-\infty; c]$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული არ აღემატება c -ს.

$(c; +\infty)$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული მეტია c -ზე.

$[c; +\infty)$ - აღნიშნავს ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეული არ არის ნაკლები c -ზე.

$\mathbb{R}$ სიმრავლის აღსანიშნავად, ზოგჯერ შეიძლება გამოყენებული იყოს $(-\infty; +\infty)$ ჩანაწერი.

ბოლო ცხრა სიმრავლეს რიცხვით შუალედებს უწოდებენ.

ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $\mathbb{R}^2$ სიმბოლოთი. თუ სიბრტყეზე მოცემულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, მაშინ $\mathbb{R}^2$ სიმრავლის შემადგენელი თითოეული დალაგებული (x, y) წყვილი გეომეტრიულად შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნას, როგორც ზემოაღნიშნული სიბრტყის ის (ერთადერთი) წერტილი, რომლის აბსცისაა x , ორდინატა კი y . ამასთან, ამ სიბრტყის ყოველი წერტილი რომელიღაც (ერთი) დალაგებული წყვილის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას წარმოადგენს.

§1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე.

1.1. რა გვქმნის სიმრავლის ქვეშ?

სიმრავლე გაიგება როგორც ნებისმიერი ბუნების მქონე ობიექტების (საგნების) ერთობლიობა (კრებული, ოჯახი)¹, რომლებიც „კარგად განირჩევიან“ ერთმანეთისაგან. სიმრავლის შემადგენელ თითოეულ ობიექტს ამ სიმრავლის ელემენტს (ან, ზოგჯერ წერტილს) უწოდებენ.

მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ დროის მოცემულ მომენტში, მოცემულ ოთახში ადამიანების სიმრავლეზე, მოცემულ მომენტში ჩვენს გალაქტიკაში არსებულ ვარსკვლავთა სიმრავლეზე, სიმრავლეზე, რომლის ერთადერთ ელემენტს წარმოადგენს მოცემულ სიბრტყეზე მდებარე ყველა წრფეების სიმრავლე და ა. შ. თუმცა, საწყის ეტაპზე, ჩვენ, ძირითადად, საქმე გვქმნება ე. წ. რიცხვით სიმრავლეებთან, რომელთა შემადგენელი ელემენტებიც ნამდვილი რიცხვებია.

სიმრავლეები, ჩვეულებრივ, დიდი ლათინური ასოებით ($A, B, C, \dots, X, Y, \dots$), ხოლო მათი შემადგენელი ელემენტები მცირე ლათინური ასოებით ($a, b, c, \dots, x, y, \dots$) აღინიშნება.

თუ a ობიექტი არის A სიმრავლის ელემენტი წერენ: $a \in A$ (იკითხება: a ეკუთვნის A -ს). წინააღმდეგ შემთხვევაში (ანუ, თუ a არ არის A სიმრავლის ელემენტი) წერენ: $a \notin A$, ან $a \bar{\in} A$ (იკითხება: a არ ეკუთვნის A -ს).

მაგალითად, $1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ხოლო $0,5 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

სიმრავლეს, რომელიც შედგება სასრული რაოდენობის $a_1, a_2, \dots, a_n$ ობიექტებისაგან, აღნიშნავენ ასე: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. ამბობენ, რომ სასრული სიმრავლე m -ელემენტიანია, თუ ის შედგება m -ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტისაგან. ასეთ სიმრავლეებს **სასრულ სიმრავლეებს** უწოდებენ. მაგალითად, პირველი სამი ნატურალური რიცხვისაგან შედგენილი $\{1, 2, 3\}$ სიმრავლე სასრულია (3-ელემენტიანია). $\{a, b, b\}$ სიმრავლე სასრულია და ის 2-ელემენტიანია, რადგან ის შეიცავს სულ ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ელემენტს (ლათინური ანბანის a და b ასოებს).

სიმრავლეებს, რომლებიც არ არის სასრული, **უსასრულო სიმრავლეებს** უწოდებენ. მაგალითად, ასეთია ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.

¹ სიმრავლეთა თეორია შეიქმნა XIX საუკუნის ბოლოს - XX საუკუნის დასაწყისში და მისი ფუძემდებელია გერმანელი მათემატიკოსი გეორგ კანტორი. მნიშვნელოვანი წვლილი აქვს შეტანილი ამ კუთხით ასევე გერმანელ მათემატიკოს რიჰარდ დედეკინდს. ამ თეორიის საშუალებით შესაძლებელი გახდა უსასრულობის ბუნების ახლებური გაგება და დადგინდა ღრმა კავშირი ფორმალურ ლოგიკასთან, თუმცა, დასაწყისშივე, თეორია წააწყდა არსებით სირთულეებს ე. წ. პარადოქსების სახით და ნათელი გახდა, რომ კანტორისეული ეს თეორია (რომელსაც „გულბერგილო“ ან „მიამიტურ“ სიმრავლეთა თეორიას უწოდებენ) საჭიროებდა უფრო მკაცრ ლოგიკურ დაფუძნებას. შემუშავდა სიმრავლეთა სხვადასხვა აქსიომური თეორიები. მათ შორის ერთ-ერთი (და უფრო მეტად გავრცელებული) ცერმელო-ფრენკელის აქსიომური თეორიაა.

ვთქვათ, P არის რაიმე (ფიქსირებული) თვისება, რომელიც შეიძლება გააჩნდეს (ან არ გააჩნდეს) ამა თუ იმ ობიექტს (საგანს).

ყველა იმ x ობიექტთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეულს გააჩნია მოცემული P თვისება, აღინიშნება ასე: $\{x \mid x\text{-ს გააჩნია } P \text{ თვისება}\}$, ან ასე: $\{x : x\text{-ს გააჩნია } P \text{ თვისება}\}$ ².

მაგალითად, $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ და } x^2 = 9\}$ არის სიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა იმ ნამდვილი რიცხვებისაგან, რომელთაგან თითოეულის კვადრეტი 9-ის ტოლია. ცხადია, ეს სიმრავლე 2-ელემენტიანია, რომლის შემადგენელი ელემენტებია რიცხვები (-3) და 3 . ამიტომ ეს სიმრავლე ასეც შეიძლება ჩავწეროთ: $\{-3, 3\}$.

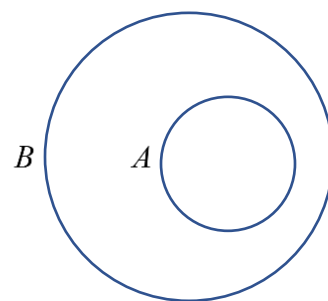
1.2. ცარიელი სიმრავლე

არსებობს (ერთადერთი) ისეთი სიმრავლე, რომელსაც არცერთი ელემენტი არ ეკუთვნის. მას **ცარიელ სიმრავლეს** უწოდებენ და აღნიშნავენ $\emptyset$ სიმბოლოთი. სიმრავლეს, რომელიც არ არის ცარიელი, არაცარიელ სიმრავლეს უწოდებენ.

1.3. სიმრავლის ქვესიმრავლე. სიმრავლეთა თეორია.

A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის **ქვესიმრავლე**, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლის ელემენტიცაა. ასეთ შემთხვევაში წერენ: $A \subset B$ (იკითხება: A შედის B -ში, ან A ჩართულია B -ში), ან $B \supset A$ (იკითხება: B მოიცავს A -ს). ცხადია, ცარიელი სიმრავლე ყოველი სიმრავლის ქვესიმრავლეა და ყოველი სიმრავლე თავის თავის ქვესიმრავლეა.

მაგალითად, ვთქვათ, A არის სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული ეკუთვნის 1-ელ ნახაზზე გამოსახულ „მცირე“ წრეს, ხოლო B არის ამავე სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული ეკუთვნის 1-ელ ნახაზზე გამოსახულ „დიდ“ წრეს (ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ეს სიმრავლეები წარმოდგენილია ვენის დიაგრამის სახით). ცხადია, $A \subset B$.



ნახაზი 1

თუ A არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე დავწეროთ: $A \not\subset B$, ან $B \not\supset A$. არის თუ არა $\{1,2,3,4\}$ სიმრავლე $\{2,3,4,5,6,7\}$ სიმრავლის ქვესიმრავლე, ან პირიქით? რატომ? ჩამოაყალიბეთ, რას ნიშნავს, რომ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე.

თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, ამბობენ, რომ A **სიმრავლე** B **სიმრავლის ტოლია** და (ისევე, როგორც რიცხვების ტოლობის შემთხვევაში) წერენ: $A = B$; თუმცა, აქ ლაპარაკია არა რიცხვების, არამედ სულ სხვა ბუნების მქონე ობიექტების (სიმრავლეების) ტოლობაზე. ამ სახის ტოლობებს **სიმრავლურ ტოლობებს** უწოდებენ. ამრიგად, ტოლობა $A = B$ ნიშნავს იმას, რომ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლესაც და, პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის A

² ფრაზა ფიგურულ ფრჩხილებში „ x -ს გააჩნია P თვისება“ შეიძლება ბუნდოვანი იყოს. მთავარი ამრი აქ იმაში მდგომარეობს, რომ ვერტიკალური ხაზის (ან ორ-წერტილის) მარჯვნივ უნდა როგორღაც (სიტყვებით, ან ფორმულებით, ან რაიმე სხვა გზით) აღინიშნოს ის თვისება, რომელიც მოცემული სიმრავლის ელემენტებს გამოარჩევს ყველა სხვა ობიექტისაგან, რომელთა გააზრებაც შესაძლებელია.

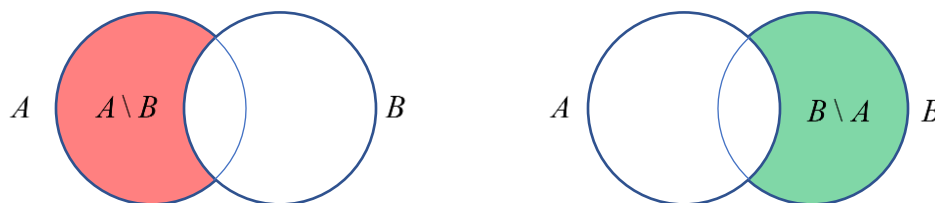
სიმრავლესაც (ანუ, სხვა სიტყვებით, ეს სიმრავლეები ერთი და იმავე ელემენტებისგან შედგება). იმ შემთხვევაში, თუ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ტოლი, დავწერთ: $A \neq B$.

1.4. სიმრავლური სხვაობა. სიმრავლის დამატება მოცემულ სიმრავლეზე.

ვთქვათ, A და B ნებისმიერი სიმრავლეებია. A სიმრავლისა და B სიმრავლის **სხვაობა** ეწოდება შემდეგ სიმრავლეს:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ და } x \notin B\}.$$

მაგალითად, მე-2 ნახაზზე ვენის დიაგრამის სახით გამოსახული ორი A და B სიმრავლისთვის $A \setminus B$ მონიშნულია წითელი ფერით, ხოლო $B \setminus A$ მწვანე ფერით.

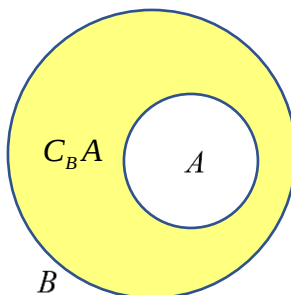


ნახაზი 2

ვთქვათ, A და B ორი ისეთი სიმრავლეა, რომ $A \subset B$. A სიმრავლის **დამატება** B სიმრავლეზე ეწოდება შემდეგ სიმრავლეს:

$$C_B A = B \setminus A.$$

მაგალითად, მე-3 ნახაზზე გამოსახული ორი A და B სიმრავლისთვის, $C_B A$ გამოსახულია ყვითელი ფერით.



ნახაზი 3

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე სიმრავლე X . ამ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathcal{P}(X)$ -ით. ამრიგად, $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლის თითოეული ელემენტი წარმოადგენს X სიმრავლის ქვესიმრავლეს და X სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლის ელემენტია. მაგალითად, 3-ელემენტიანი $X = \{a, b, c\}$ სიმრავლისთვის $\mathcal{P}(X)$ იქნება შემდეგი 8-ელემენტიანი სიმრავლე:

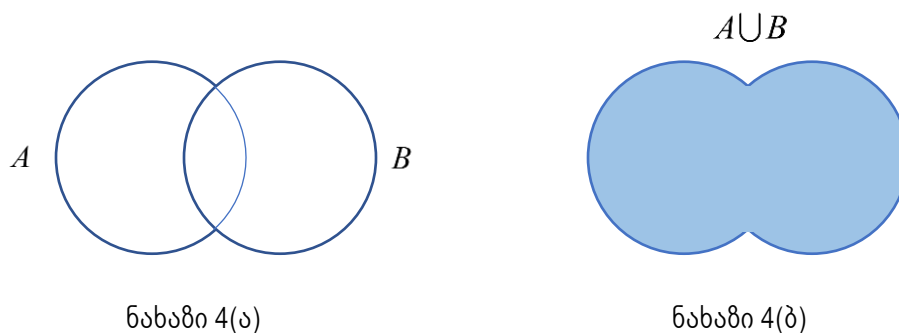
$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

1.5. ორი სიმრავლის გაერთიანება.

ორი – A და B – სიმრავლის **გაერთიანება** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს (აღინიშნება $A \cup B$ სიმბოლოთი), რომელიც შედგება იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომელთაგან თითოეული ეკუთვნის ამ ორი სიმრავლიდან ერთს მაინც:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ან } x \in B\}.$$

მე-4(ა) ნახაზზე ვენის დიაგრამის სახით წარმოდგენილია ორი A და B სიმრავლე, მე-4(ბ) ნახაზზე კი ლურჯი ფერით სქემატურად გამოსახულია ამ სიმრავლეთა გაერთიანება.

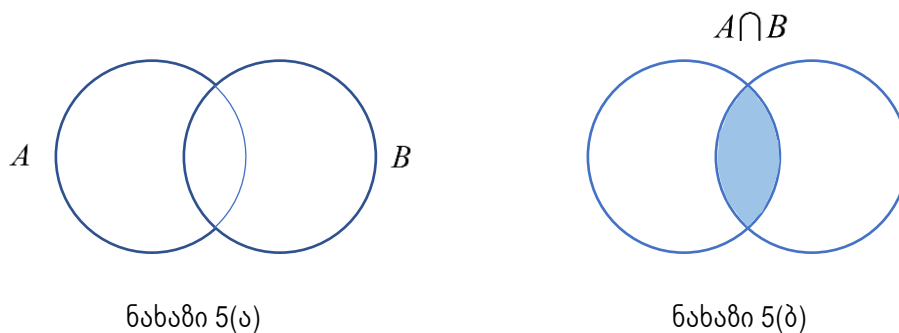


1.6. ორი სიმრავლის თანაკვეთა.

ორი – A და B – სიმრავლის **თანაკვეთა** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს (აღინიშნება $A \cap B$ სიმბოლოთი) რომელიც შედგება იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომელთაგან თითოეული ეკუთვნის როგორც ერთ ისე მეორე სიმრავლეს:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ და } x \in B\}.$$

მე-5(ა) ნახაზზე ვენის დიაგრამის სახით წარმოდგენილია ორი A და B სიმრავლე, მე-5(ბ) ნახაზზე კი ლურჯი ფერით სქემატურად გამოსახულია ამ სიმრავლეთა თანაკვეთა.



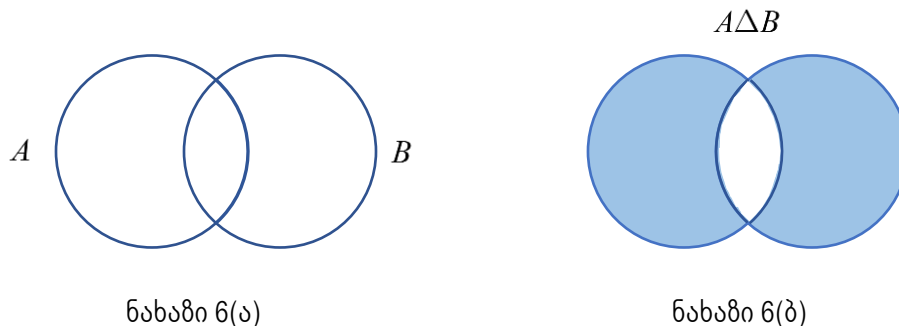
თუ ორი სიმრავლის თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა, ზოგჯერ (მათემატიკურ ჟარგონზე) ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს თანაკვეთა არა აქვთ.

1.7. ორი სიმრავლის სიმეტრიული სხვაობა.

ორი – A და B – სიმრავლის **სიმეტრიული სხვაობა** (აღინიშნება $A \Delta B$ სიმბოლოთი, რაც იკითხება როგორც „ A დელტა B “) განიმარტება შემდეგნაირად:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

მე-6(ა) ნახაზზე ვენის დიაგრამის სახით წარმოდგენილია ორი A და B სიმრავლე, მე-6(ბ) ნახაზზე კი ლურჯი ფერით სქემატურად გამოსახულია ამ სიმრავლეთა სიმეტრიული სხვაობა.



1.8. დე მორგანის კანონები.

ნებისმიერი M სიმრავლისათვის და მისი ნებისმიერი ორი A და B ქვესიმრავლისათვის სამართლიანია შემდეგი ორი სიმრავლური ტოლობა (რომელთაც **დე მორგანის კანონებს** უწოდებენ):

$$1. \quad C_M(A \cup B) = (C_M A) \cap (C_M B)$$

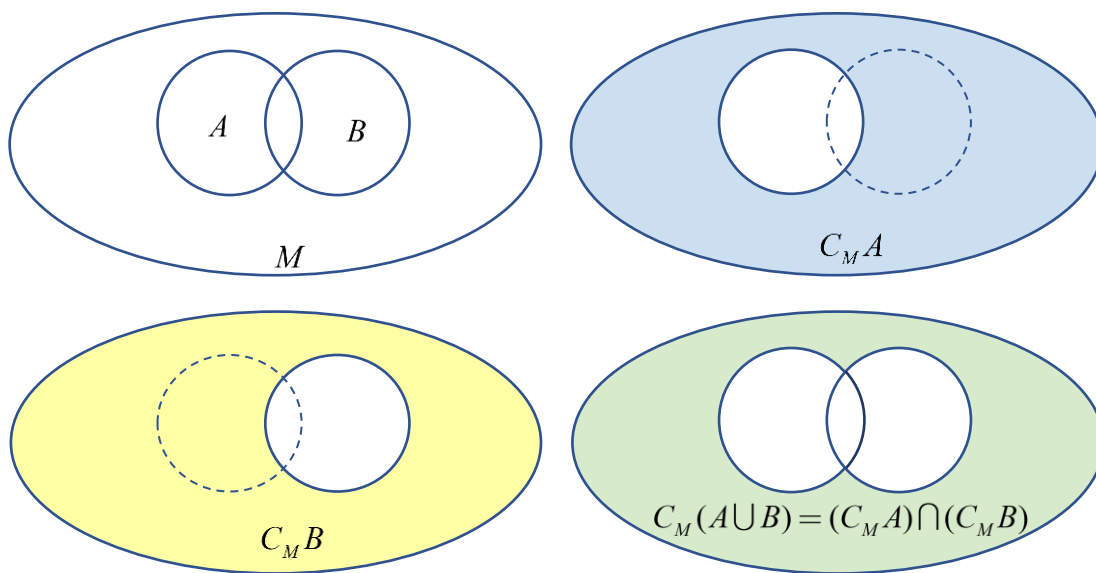
და

$$2. \quad C_M(A \cap B) = (C_M A) \cup (C_M B).$$

დავამტკიცოთ, მაგალითად, პირველი ტოლობა. ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ $C_M(A \cup B)$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი $(C_M A) \cap (C_M B)$ სიმრავლის ელემენტიცაა (ანუ, რომ $C_M(A \cup B) \subset (C_M A) \cap (C_M B)$) და პირიქით.

მართლაც, ვთქვათ, x არის $C_M(A \cup B)$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ, განმარტების თანახმად, $x \in M \setminus (A \cup B)$. მაშასადამე, $x \in M$ და $x \notin A \cup B$. რადგან $x \notin A \cup B$, ამიტომ $x \notin A$ და $x \notin B$. მაგრამ, რადგან $x \in M$, აქედან გამომდინარეობს, რომ $x \in M \setminus A = C_M A$ და $x \in M \setminus B = C_M B$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $x \in (C_M A) \cap (C_M B)$. ამით ჩართვა $C_M(A \cup B) \subset (C_M A) \cap (C_M B)$ დამტკიცებულია. სავსებით ანალოგიურად შეიძლება ჩვენება, რომ $(C_M A) \cap (C_M B) \subset C_M(A \cup B)$. ტოლობა $C_M(A \cup B) = (C_M A) \cap (C_M B)$ დამტკიცებულია (იხ. ნახაზი 7).

მე-2 ტოლობა დაამტკიცეთ დამოუკიდებლად.



ნახაზი 7

1.9. ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი.

ვიდრე განვმარტავდეთ ორი სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლს, აღვნიშნავთ შემდეგს: ყოველი ორი (ნებისმიერი ბუნების მქონე) a და b ობიექტისათვის არსებობს ახალი (a, b) ობიექტი, რომელსაც a და b ობიექტების **დალაგებულ წყვილს** უწოდებენ. a -ს ეწოდება (a, b) დალაგებული წყვილის პირველი კომპონენტი, b -ს კი – მეორე კომპონენტი. ამასთან, ორი დალაგებული (a, b) და (c, d) წყვილი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a და c ერთი და იგივე ობიექტია (ანუ, როცა $a = b$) და, ამავე დროს, c და d -ც ერთი და იგივე ობიექტია (ანუ როცა $c = d$)

ახლა შეიძლება განიმარტოს ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი.

ორი – A და B – სიმრავლის **დეკარტული ნამრავლი** (აღინიშნება $A \times B$ სიმბოლოთი) ეწოდება ყველა შესაძლო დალაგებულ (x, y) წყვილთა სიმრავლეს, სადაც $x \in A$ და $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ და } y \in B\}.$$

მაგალითად, ვთქვათ, მოცემულია 2-ელემენტური $A = \{1, 2\}$ და 3-ელემენტური $B = \{a, b, c\}$ სიმრავლე. მაშინ, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$. როგორც ვხედავთ, ამ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი 6-ელემენტური სიმრავლეა.

ამ მაგალითის გამოყენებით, შეამოწმეთ, რომ, საზოგადოდ, $A \times B \neq B \times A$.

³ რენე დეკარტი (1596-1650) – დიდი ფრანგი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი თავის თავზე წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს, რაც გეომეტრიულად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც (ნამდვილი) საკოორდინატო სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლე.

1.10. სავარჯიშო ამოცანები

1.10.1 ჩაწერეთ 1-ელემენტიანი სიმრავლე, რომლის ერთადერთი ელემენტია რიცხვი 3,5.

1.10.2. ჩაწერეთ 1-ელემენტიანი სიმრავლე, რომლის ერთადერთი ელემენტია ცარიელი სიმრავლე.

1.10.3. ჩაწერეთ 4-ელემენტიანი სიმრავლე, რომლის ელემენტებს წარმოადგენენ რიცხვები: 0, 7, 26, 63.

1.10.4. ჩაწერეთ სიმრავლე, რომელიც შედგება იმ და მხოლოდ იმ რაციონალური რიცხვებისაგან, რომელთაგან თითოეული მეტია 1-ზე.

1.10.5. ჩაწერეთ სიბრტყის საკოორდინატო სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული ძევს წრეწირზე, რომლის ცენტრია საკოორდინატო სისტემის სათავე, ხოლო რადიუსი 1 ერთეულის ტოლია.

1.10.6. მოცემულია სიმრავლეები:

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ და } x^2 - 1 = 0\} \text{ და } B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ და } x^3 = x\}.$$

დაამტკიცეთ, რომ $A \subset B$.

1.10.7. მოცემულია სიმრავლეები:

$$X = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ და } \sin x \leq 1\} \text{ და } Y = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ და } \sin x \geq -1\}$$

დაამტკიცეთ, რომ $X = Y$.

1.10.8. რატომ არ არის $[0;1]$ ჩაკეტილი მონაკვეთი $[0,01;2]$ ჩაკეტილი მონაკვეთის ქვესიმრავლე? რატომ არ არის $[0,01;2]$ ჩაკეტილი მონაკვეთი $[0;1]$ ჩაკეტილი მონაკვეთის ქვესიმრავლე?

1.10.9. იპოვეთ $A \setminus B$ და $B \setminus A$, თუ:

ა) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ და $B = \{4, 5, 6\}$;

ბ) $A = \{1\}$ და $B = \{1, 2\}$;

გ) $A = \emptyset$ და $B = \mathbb{R}$;

დ) $A = \mathbb{R}$ და $B = \mathbb{Q}$.

1.10.10. მოცემულია ისეთი ორი A და B სიმრავლე, რომ $A \subset B$. იპოვეთ $A \setminus B$.

1.10.11. მართალია თუ არა, რომ თუ $A = B$, მაშინ $A \setminus B = \emptyset$? მართალია, თუ არა რომ თუ $A \setminus B = \emptyset$, მაშინ $A = B$? რატომ?

1.10.12. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A \setminus B = \emptyset$, მაშინ $A \subset B$.

1.10.13. ვთქვათ, A არის X სიმრავლის ქვესიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ $C_X(C_X A) = A$ (სიმრავლის დამატების დამატება თვით ამ სიმრავლის ტოლია).

1.10.14. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$ და $A \Delta B$, თუ:

- ა) $A = \{a, b, c, d\}$ და $B = \{d, e, \}$;
- ბ) $A = \{a, b, c, d\}$ და $B = \{e, f, g, h, i, j\}$;
- გ) $A = [0; 2]$ და $B = [1; 3]$;
- დ) $A = [0; 1] \cup [2; 3]$ და $B = (1; 2)$.

1.10.15. იპოვეთ $A \cap B$ თუ

$$A = \{(x; y) | (x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 25\} \text{ და } B = \{(x; y) | (x; y) \in \mathbb{R}^2, 3x = 4y\}.$$

რამდენ ელემენტიანია $A \cap B$ სიმრავლე?

1.10.16. ვთქვათ A – 5-ელემენტიანი სიმრავლეა, B – 7-ელემენტიანი სიმრავლეა, ხოლო $A \cap B$ – 2-ელემენტიანი სიმრავლეა. იპოვეთ $A \cup B$ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა.

1.10.17. საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახეთ შემდეგი სიმრავლეები:

- ა) $[0; 1] \times [0; 1]$;
- ბ) $([0; 1] \cup [2; 3]) \times [1; 2]$.

1.10.18. ვთქვათ, $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ და $B = \{\emptyset\}$. იპოვეთ:

- ა) $A \times B$;
- ბ) $B \times A$;
- გ) $(A \times B) \cap (B \times A)$.

§2. ფუნქცია (ასახვა)

2.1. ფუნქციის განმარტება.

ფუნქცია (ან, ასახვა) X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში ეწოდება შესაბამისობის ყოველ ისეთ f წესს, რომლის მიხედვითაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი¹.

X სიმრავლეს ეწოდებენ f ფუნქციის **განსაზღვრის არეს**, Y სიმრავლეს კი – **მნიშვნელობათა სიმრავლეს**. Y სიმრავლის ის ერთადერთი y ელემენტი, რომელიც შეესაბამება X სიმრავლის x ელემენტს f ფუნქციის დროს, აღინიშნება $f(x)$ -ით. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ f ფუნქციას X სიმრავლის x ელემენტი გადაჰყავს Y სიმრავლის $y = f(x)$ ელემენტში, ან რომ x ელემენტი f -ით აისახება (ან გადმოდის) y -ზე.

იმის აღსანიშნავად, რომ f არის X ფუნქცია სიმრავლიდან Y სიმრავლეში, წერენ:

$$f : X \rightarrow Y.$$

ისეთ ფუნქციებს, რომელთა მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (ან მისი რაიმე ქვესიმრავლეა), ნამდვილ ფუნქციებს ეწოდებენ, ხოლო ისეთ ნამდვილ ფუნქციებს, რომელთა განსაზღვრის არეც ასევე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეა, ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციებს ეწოდებენ.

ფუნქცია, ანუ შესაბამისობის წესი X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში, შეიძლება აღწერილი იყოს სიტყვებით, ან (ბევრ შემთხვევაში) ფორმულის საშუალებით, ან რაიმე სხვა გზით.

2.2. ფუნქციათა ტოლობა.

ორ $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ და $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ ფუნქციას ეწოდება **ტოლი**, თუ $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ და ყოველი $x \in X_1 = X_2$ -სათვის $f_1(x) = f_2(x)$. ასეთ შემთხვევაში წერენ: $f_1 = f_2$. წინააღმდეგ შემთხვევაში წერენ: $f_1 \neq f_2$.

2.3. ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციის გრაფიკი.

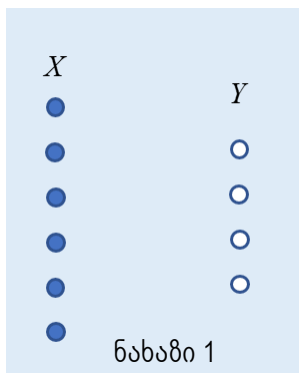
ვთქვათ, მოცემულია ფიქსირებული საკოორდინატო სისტემა და ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი $f : X \rightarrow Y$ ფუნქცია. f ფუნქციის **გრაფიკი** ეწოდება ამ საკოორდინატო სისტემაზე მდებარე

¹ „შესაბამისობის წესი“, რომელიც ფიგურირებს ამ განმარტებაში, არ არის მკაცრად განმარტებული მათემატიკური ობიექტი. თუ მთლად ზუსტად ვილაპარაკებთ, X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში ფუნქცია (ასახვა) ეს არის $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის ყოველი ისეთი Γ ქვესიმრავლე, რომელსაც გააჩნია შემდეგი ორი თვისება: (ა) X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს Y სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ წყვილი (x, y) ეკუთვნის Γ -ს და (ბ) თუ $(x, y_1), (x, y_2) \in \Gamma \subset X \times Y$, მაშინ $y_1 = y_2$. თუმცა (წმინდა პედაგოგიური მოსაზრებიდან გამომდინარე), პირველ ხანებში, ალბათ უმჯობესია, მხედველობაში გვქონდეს ზემოთ მოცემული განმარტება.

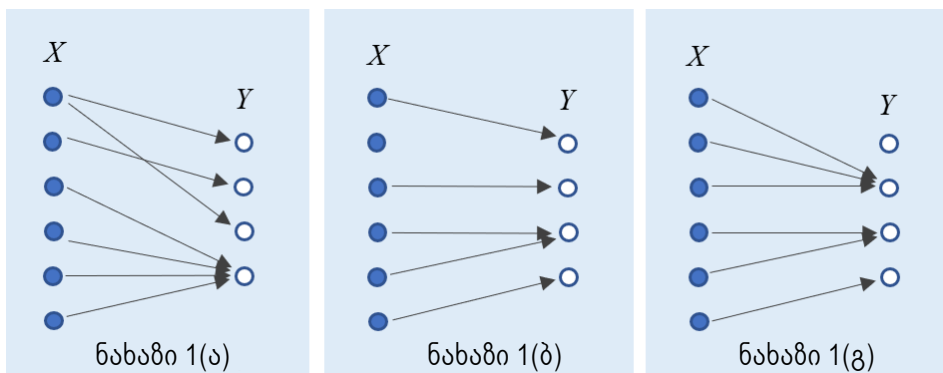
ნამდვილ რიცხვთა ყველა იმ დალაგებული (x, y) წყვილების შესაბამისი წერტილების² სიმრავლეს, სადაც $x \in X$ და $y = f(x)$.

2.3. მაგალითები.

2.3.1. ვთქვათ, X არის სიბრტყის ლურჯი ფერით მონიშნული წერტილების 6-ელემენტიანი სიმრავლე, Y კი – თეთრი ფერით მონიშნული წერტილების 4-ელემენტიანი სიმრავლე (იხ. ნახ. 2).



ქვემოთ მოცემულ ნახაზებზე ისრების საშუალებით აღწერილია თითო შესაბამისობის წესი ამ X სიმრავლიდან ამ Y სიმრავლეში.



1(ა) ნახაზზე აღწერილი შესაბამისობის წესი არ წარმოადგენს ფუნქციას X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში, რადგან ამ წესის მიხედვით X სიმრავლის ერთ-ერთ ელემენტს (კერძოდ, „გემოდან“ პირველს) შეესაბამება Y სიმრავლის ორი (განსხვავებული) ელემენტი („გემოდან“ პირველი და „გემოდან“ მესამე).

არც 1(ბ) ნახაზზე აღწერილი შესაბამისობის წესია ფუნქცია, რადგან X სიმრავლის ერთ-ერთ ელემენტს (კერძოდ, „გემოდან“ მეორეს) არ შეესაბამება Y სიმრავლის არცერთი ელემენტი.

რაც შეეხება 1(გ) ნახაზზე აღწერილ შესაბამისობის წესს, ის არის ფუნქცია, რადგან X სიმრავლეში არ არის დარჩენილი არცერთი ისეთი ელემენტი, რომელსაც არ შეესაბამებოდეს Y სიმრავლის

² ქვემოთ, ყველგან, საკოორდინატო სიბრტყის წერტილებს გავაიგივებთ ხოლმე ამ წერტილების შესაბამის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებთან. ანუ, გრაფიკის წერტილებად ხშირად ჩავთვლით არა საკოორდინატო სიბრტყის წერტილებს, არამედ მათ შესაბამის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებს.

რომელიმე ელემენტი და ამასთან, X სიმრავლის თითოეულ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის მხოლოდ ერთი ელემენტი. შევნიშნოთ, რომ, ამ შემთხვევაში, Y სიმრავლეში არის ისეთი ელემენტი, რომელზეც X სიმრავლის არცერთი ელემენტი არ აისახება (რაც არ ეწინააღმდეგება ფუნქციის განმარტებას).

2.3.2. მათემატიკის სასკოლო კურსის ფარგლებში შეისწავლება ე. წ. ელემენტარული ფუნქციები (წრფივი, კვადრატული, ხარისხოვანი, ტრიგონომეტრიული, შექცეული ტრიგონომეტრიული, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული). თითოეული ეს ფუნქცია მოცემულია ფორმულის საშუალებით. მაგალითად, $f(x) = x^2$ (ან $y = x^2$) ფორმულით მოცემულია კვადრატული ფუნქცია. მაგრამ, რომელია ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე? ან, რომელია შესაბამისობის ის წესი, რომელიც განსაზღვრავს ამ ფუნქციას?

პირველ რიგში აღვნიშნავთ, რომ საზოგადოდ, როცა ლაპარაკია ფორმულით მოცემულ ნამდვილ ცვლადის ნამდვილ ფუნქციებზე, არსებობს ასეთი შეთანხმება: თუ განსაზღვრის არე სპეციალურად არ არის მითითებული, იგულისხმება, რომ ასეთად მიჩნეულია ე. წ. მაქსიმალური განსაზღვრის არე, ანუ ყველა იმ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვისაც ფორმულაში ტოლობის ერთ მხარეს მდგომ ცვლადის შემცველ გამოსახულებას აზრი აქვს; რაც შეეხება მნიშვნელობათა სიმრავლეს, აქ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

დავუბრუნდეთ ისევ $f(x) = x^2$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას. ზემოაღნიშნული შეთანხმების თანახმად, ამ ფორმულით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (რადგან გამოსახულებას „ x^2 “ აზრი აქვს ყოველი ნამდვილი „ x “ რიცხვისათვის), მნიშვნელობათა სიმრავლე კი ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა (ყოველი ნამდვილი რიცხვის კვადრატი კვლავ ნამდვილი რიცხვია). შესაბამისობის წესი, ამ შემთხვევაში, გახლავთ კვადრატში ახარისხება: ყოველ ნამდვილ რიცხვს ეს ფუნქცია უთანადებს ამ რიცხვის კვადრატს. კერძოდ, რიცხვ

2-ს შეესაბამება რიცხვი 4 ($f(2) = 4$), $\sqrt{3}$ -ს – 3 ($f(\sqrt{3}) = 3$), 0-ს – 0 ($f(0) = 0$), $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -ს – $\frac{1}{4}$

($f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$) და ა. შ. ამ ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც, როგორც ცნობილია, პარაბოლა ეწოდება,

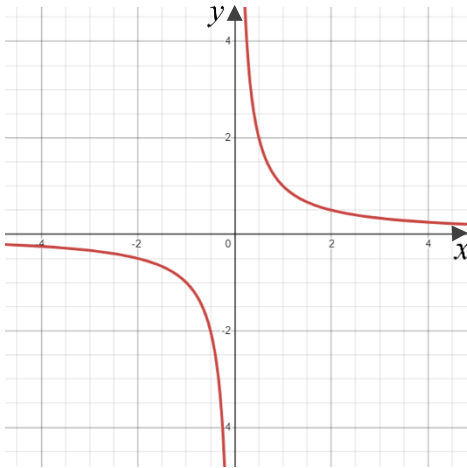
შედგება ყველა (x, x^2) ტიპის წერტილებისაგან, სადაც $x \in \mathbb{R}$.

2.3.3. ზემოაღნიშნული შეთანხმების მიხედვით, $y = \frac{1}{x}$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის

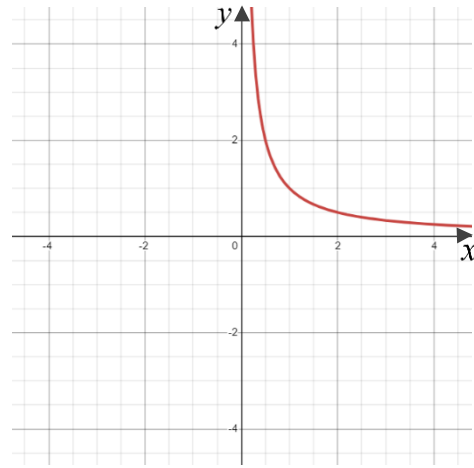
განსაზღვრის არეა $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ სიმრავლე; მისი გრაფიკი 2(ა) ნახაზზეა გამოსახული. თუმცა, თუ განსაზღვრის არედ $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ სიმრავლის ნაცვლად გამოვაცხადებთ $(0; +\infty)$

სიმრავლეს, მაშინ ამავე $y = \frac{1}{x}$ ფორმულით განსაზღვრულ ფუნქცია (რომლის გრაფიკიც

მოცემულია 2(ბ) ნახაზზე), არ იქნება წინა ფუნქციის ტოლი (რადგან ამ ფუნქციებს განსხვავებული განსაზღვრის არეები აქვთ).

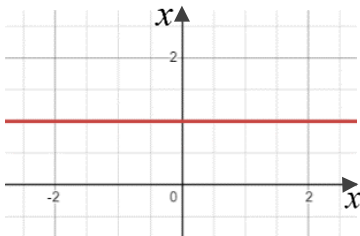


ნახაზი 2(ა)

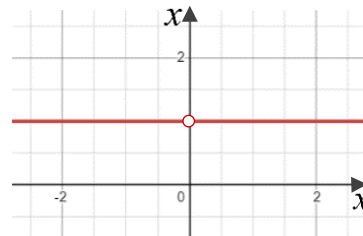


ნახაზი 2(ბ)

2.3.4. განვიხილოთ $f(x) = 1$ და $g(x) = x \cdot \frac{1}{x}$ ფორმულებით მოცემული ფუნქციები. ცხადია, $f \neq g$, რადგან f -ის განსაზღვრის არეა $\mathbb{R}$, g ფუნქციისა კი – $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (მათი გრაფიკები მოცემულია, შესაბამისად, 3(ა) და 3(ბ) ნახაზებზე³).



ნახაზი 3(ა)



ნახაზი 3(ბ)

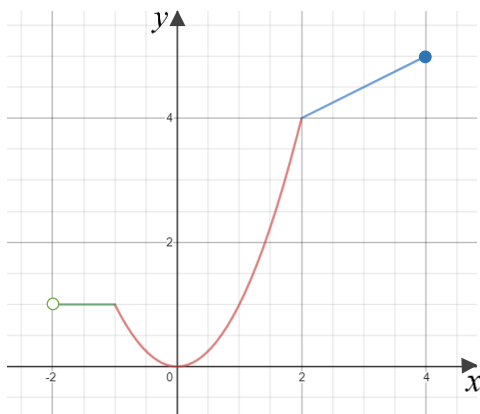
2.3.5. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს „უბან-უბან“. მაგალითად, განვიხილოთ ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია („უბან-უბან“) შემდეგი წესის მიხედვით:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } -2 < x \leq -1 \\ x^2, & \text{თუ } -1 < x < 2 \\ 0,5x + 3, & \text{თუ } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

ეს ფუნქცია ყოველი x -სათვის, რომელიც ეკუთვნის $(-2; -1]$ შუალედს, ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას, ყოველი x -სათვის, რომელიც ეკუთვნის $(-1; 2)$ შუალედს – x^2 -ის ტოლ მნიშვნელობას და ყოველი x -სათვის, რომელიც ეკუთვნის $[2; 4]$ $(0,5x + 3)$ -ის ტოლ შუალედს – მნიშვნელობას. სხვა არცერთი ნამდვილი x -სათვის ეს ფუნქცია განსაზღვრული არ

³ თეთრად მონიშნული წერტილი გრაფიკს არ ეკუთვნის.

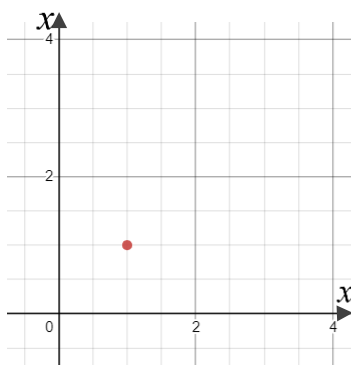
არის. ამიტომ, ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა სიმრავლე: $(-2; -1] \cup (-1; 2) \cup (-2; 4] = (-2; 4]$. მისი გრაფიკი მოცემულია მე-4 ნახაზზე⁴.



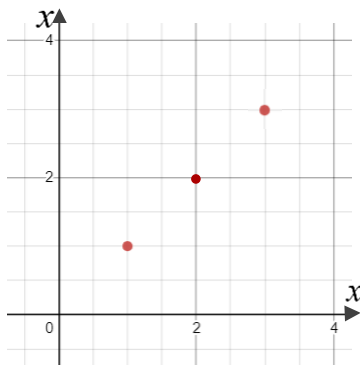
ნახაზი 4

2.3.6. განვიხილოთ სამი $f: \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ და $h: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია რომლებიც განსაზღვრულია შემდეგი წესის მიხედვით: ყოველი მათგანი თავისი განსაზღვრის არის შემადგენელ ყოველ რიცხვს ამავე რიცხვს უთანადებს.

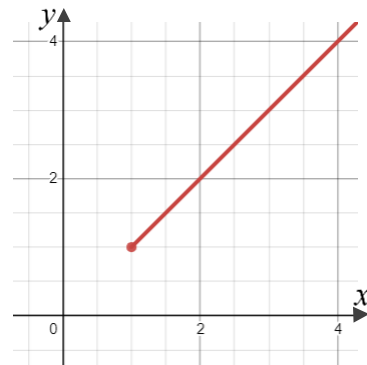
მაშინ, f ფუნქციის გრაფიკი 1-წერტილიანი იქნება და ეს ერთადერთი წერტილია $(1, 1)$ (იხ. ნახ. 5(ა)), g ფუნქციის გრაფიკი შედგება სამი $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ – წერტილისაგან (იხ. ნახაზი 5(ბ)), ხოლო h ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს უსასრულო (ჩაკეტილ) სხივს (იხ. ნახაზი 5(გ)).



ნახაზი 5(ა)



ნახაზი 5(ბ)



ნახაზი 5(გ)

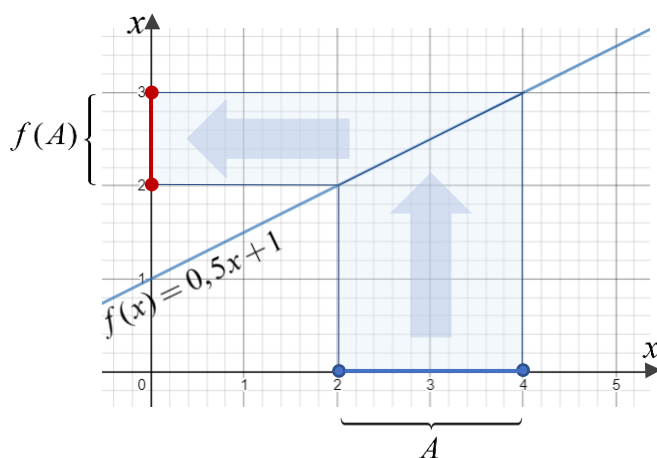
⁴ როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თეთრი ფერით მონიშნული წერტილი არ ეკუთვნის ამ გრაფიკს, მუქი ფერით მონიშნული წერტილი კი – ეკუთვნის (ასეთ აღნიშვნებს ქვემოთ არაერთხელ გამოვიყენებთ).

2.4. განსაზღვრის არის ქვესიმრავლის ანასახი.

ვთქვათ, მოცემულია X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში რაიმე $f: X \rightarrow Y$ ასახვა და ვთქვათ, $A \subset X$. A სიმრავლეში შემავალი თითოეული x ელემენტი გადასახოთ Y -ში f ასახვით. ამის შედეგად მიღებული y -ების სიმრავლე აღვნიშნოთ $f(A)$ სიმბოლოთი (ცხადია, $f(A)$ – Y სიმრავლის ქვესიმრავლეა). ამ სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის **ანასახი** Y სიმრავლეში (f ასახვის დროს). $f(A)$ სიმრავლის ზუსტი განმარტება ასეთია:

$$f(A) = \{y \mid y \in Y \text{ და არსებობს (ერთი მაინც) ისეთი } x \in A, \text{ რომ } f(x) = y\}.$$

მაგალითად, თუ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ განსაზღვრულია ფორმულით: $f(x) = 0,5x + 1$, მაშინ $f([2; 4]) = [2; 3]$ (იხ. ნახაზი 6).



ნახაზი 6

2.7. ფუნქციის მნიშვნელობათა არე.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f: X \rightarrow Y$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არე ეწოდოთ Y სიმრავლის $f(X)$ ქვესიმრავლეს.

მაგალითად, $f(x) = x^2$ ფორმულით განსაზღვრული $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა სიმრავლე: $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty)$. შეამოწმეთ!

2.6. მნიშვნელობათა სიმრავლის ქვესიმრავლის წინა სახე.

ვთქვათ, მოცემულია X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში რაიმე $f: X \rightarrow Y$ ასახვა და ვთქვათ, $B \subset Y$. X სიმრავლის ყველა იმ x ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც f -ს გადაჰყავს B სიმრავლეში, აღვნიშნება $f^{-1}(B)$ სიმბოლოთი და ამ სიმრავლეს (რომელიც, ცხადია, X სიმრავლის ქვესიმრავლეა) ეწოდება B სიმრავლის **წინა სახე** f ასახვის დროს. ქვემოთ მოგვყავს $f^{-1}(B)$ სიმრავლის ზუსტი განმარტება.

$$f^{-1}(B) = \{x | x \in X \text{ და } f(x) \in B\}.$$

მაგალითად, თუ $f : [-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ განსაზღვრულია ფორმულით: $f(x) = x^2$, მაშინ $f^{-1}([1; 4]) = \{-1\} \cup [1; 2]$ (იხ. ნახაზი 7).

2.7. ინექციური ასახვები.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f : X \rightarrow Y$ ასახვას ეწოდება ინექციური ასახვა (ფუნქცია), ან, უბრალოდ, **ინექცია**, თუ X სიმრავლის ყოველი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული x_1 და x_2 ელემენტისათვის სამართლიანია უტოლობა: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

მაგალითად, $f(x) = x^3$ ფორმულით განსაზღვრული $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია ინექციაა (რადგან ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვების კუბებიც განსხვავებულია). $f(x) = x^4$, $f(x) = \sin x$ და $f(x) = 1$ ფორმულებით $\mathbb{R}$ -დან $\mathbb{R}$ -ში განსაზღვრული ფუნქციებიდან კი არცერთი არ არის ინექცია. მართლაც, $(-1) \neq 1$, მაგრამ $(-1)^4 = 1 = 1^4$; ასევე, $\frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{2}$, მაგრამ $\sin \frac{\pi}{2} = 1 = \sin \frac{5\pi}{2}$, რაც შეეხება მესამე ფუნქციას, აქ ყველაფერი ნათელია.

შევნიშნოთ, რომ $f(x) = x^4$ ფორმულით $[0; +\infty)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული (ნამდვილი) ფუნქცია ინექციაა. რატომ? ასევე,

$f(x) = \sin x$ ფორმულით $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული (ნამდვილი) ფუნქციაც ინექციაა.

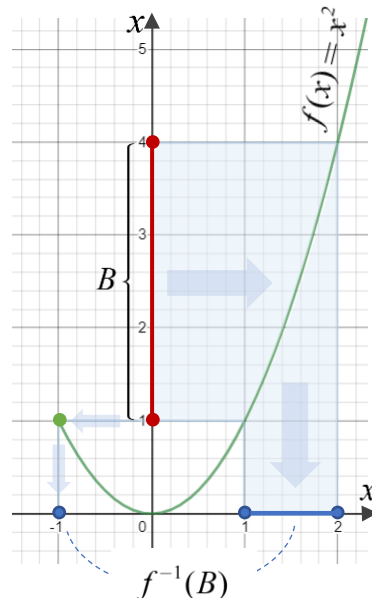
შეამოწმეთ! თუმცა, არ არსებობს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს ერთზე მეტ ელემენტს, ისეთი, რომ მასზე $f(x) = 1$ ფორმულით განსაზღვრული (ნამდვილი) ფუნქცია იყოს ინექცია. შეამოწმეთ!

2.8. სურექციური ასახვები.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f : X \rightarrow Y$ ასახვას ეწოდება სურექციური ასახვა (ფუნქცია), ან, უბრალოდ, **სურექცია**, თუ Y სიმრავლის ნებისმიერი y ელემენტისათვის არსებობს X სიმრავლის (ერთი მაინც) ისეთი x ელემენტი, რომ $f(x) = y$.

მაგალითად, ასახვა $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, სადაც ყოველი $x \in \mathbb{R}$ -სათვის $f(x) = 2x - 1$, სურექციურია, რადგან ნებისმიერი $y \in \mathbb{R}$ -სათვის $f(x) = y$, სადაც $x = \frac{y+1}{2}$. შეამოწმეთ!

ასახვა $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, სადაც ყოველი $x \in \mathbb{R}$ -სათვის $f(x) = \cos x$ არ არის სურექცია, რადგან, მაგალითად, $\mathbb{R}$ სიმრავლის $y = 2$ ელემენტისათვის არ მოიძებნება ისეთი $x \in \mathbb{R}$ ელემენტი, რომ სამართლიანი იყოს ტოლობა: $f(x) = y$. რატომ?



ნახაზი 7

აქვე შევნიშნავთ, რომ $f(x) = \cos x$ ფორმულით განსაზღვრული $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ ასახვა, სურექციაა. მართლაც ნებისმიერი $y \in \mathbb{R}$ -სათვის $f(x) = y$ თუ $x = \arccos y$. არსებობს კიდევ სხვა ასეთი x ?

2.9. ბიექციური ასახვები.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში $f: X \rightarrow Y$ ასახვას ეწოდება ბიექციური ასახვა (ფუნქცია), ან, უბრალოდ, **ბიექცია**, თუ f ინექციაა და სურექციაა⁵. X და Y სიმრავლეებს უწოდებენ ერთმანეთის ბიექციურ სიმრავლეებს თუ არსებობს ერთი მაინც ბიექცია X -დან Y -ზე. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ X და Y – ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებია.

$f(x) = x^2$ ფორმულით მოცემული $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია არ არის ბიექცია, რადგან ის არ არის, მაგალითად, ინექცია (შევნიშნოთ, რომ ეს ასახვა არც სურექციაა). შეამოწმეთ!

$f(x) = x^2$ ფორმულით მოცემული $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია არ არის ბიექცია, რადგან ის არ არის, სურექცია (თუმცა არის ინექცია). შეამოწმეთ!

$f(x) = x^2$ ფორმულით მოცემული $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ ფუნქცია უკვე არის ბიექცია, რადგან ის ინექციაა და სურექციაა.

2.10. შექცეული (შებრუნებული) ასახვა.

ბიექციური ასახვებისთვის (და მხოლოდ მათთვის) განიმარტება შექცეული (ან, რაც იგივეა, შებრუნებული) ასახვები. უფრო ზუსტად, ვთქვათ, $f: X \rightarrow Y$ – ნებისმიერი ბიექციური ასახვაა. სამოგადოდ შეიძლება არსებობდეს უამრავი ასახვა Y სიმრავლიდან X სიმრავლეში. ჩვენ ახლა (f ასახვის საშუალებით) ავაგებთ გარკვეულ ასახვას Y -დან X -ში, რომელსაც ეწოდება მოცემული (ბიექციური) f ასახვის **შექცეული (ან, შებრუნებული) ასახვა** და რომელიც აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი.⁶

ამისათვის, განვიხილოთ Y სიმრავლის ნებისმიერი y ელემენტი. რადგან f ბიექციაა, ის, კერძოდ, სურექციაა. ამიტომ არსებობს ისეთი $x \in X$, რომ $f(x) = y$. ახლა შევნიშნოთ, რომ ასეთი x ერთადერთია. წინააღმდეგ შემთხვევაში f აღარ იქნება ბიექციური და, მით უმეტეს, ბიექციური ასახვა. ამრიგად, ყოველი $y \in Y$ ელემენტისათვის არსებობს X სიმრავლის ერთადერთი ისეთი x ელემენტი, რომ $f(x) = y$. სწორედ ეს ერთადერთი x მივიჩნიოთ $y \in Y$ ელემენტის შესაბამის ელემენტად $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ასახვის დროს.

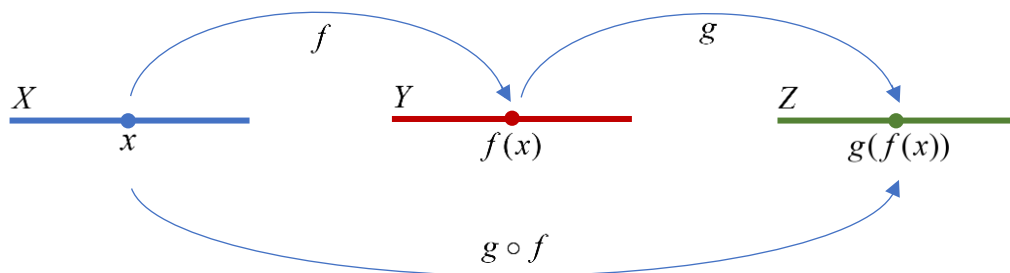
მაგალითად, მარტივად მოწმდება, რომ $f: (-\infty; 0] \rightarrow [0; +\infty)$ ასახვა, რომელიც განმარტებულია $f(x) = x^2$ ფორმულით, ბიექციაა. შეამოწმეთ, რომ $f^{-1}: [0; +\infty) \rightarrow (-\infty; 0]$ ასახვა მოიცემა შემდეგი ფორმულით: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

⁵ ასეთ ასახვებს ურთიერთცალსახა ასახვებსაც უწოდებენ.

⁶ არ უნდა აგვერიოს 2.6 პუნქტში მიღებულ აღნიშვნაში.

2.11. ასახვათა კომპოზიცია.

განვიხილოთ ისეთი ორი $f: X \rightarrow Y$ და $g: Y \rightarrow Z$ ასახვა, რომ f -ის მნიშვნელობათა სიმრავლე ემთხვევა g ასახვის განსაზღვრის არეს. ყოველი ასეთი ორი ასახვის საშუალებით განიმარტება ასახვა X სიმრავლიდან Z სიმრავლეში, რომელიც აღინიშნება $g \circ f$ სიმბოლოთი და რომელსაც f -ისა და g -ს **კომპოზიცია** ეწოდება. ეს განმარტება ასეთია: X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის $g \circ f(x) = g(f(x))$ (იხ. სქემა მე-8 ნახაზზე).



ნახაზი 8

მაგალითად, ვთქვათ, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ და $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, შესაბამისად, $f(x) = x^2$ და $g(x) = x + 1$ ფორმულებით განსაზღვრული ორი ასახვაა. მაშინ, $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ და $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ კომპოზიციები განსაზღვრული იქნება, შესაბამისად, $g \circ f(x) = x^2 + 1$ და $f \circ g(x) = (x + 1)^2$ ფორმულებით.

2.11.1. თეორემა. თუ $f: X \rightarrow Y$ და $g: Y \rightarrow Z$ ინექციური ასახვებია, მაშინ მათი $g \circ f: X \rightarrow Z$ კომპოზიციაც ინექციური ასახვაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ X სიმრავლის ნებისმიერი ისეთი ორი $x_1, x_2 \in X$ ელემენტი, სადაც $x_1 \neq x_2$. რადგან f ინექციაა, ამიტომ $f(x_1) \neq f(x_2)$ და რადგან g -ც ინექციაა, გვექნება: $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. მაგრამ $g(f(x_1)) = g \circ f(x_1)$ და $g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$. ამრიგად, $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ და ე. ი. $g \circ f$ – ინექციაა.

2.11.2. თეორემა. თუ $f: X \rightarrow Y$ და $g: Y \rightarrow Z$ სურექციული ასახვებია, მაშინ მათი $g \circ f: X \rightarrow Z$ კომპოზიციაც სურექციული ასახვაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ Z სიმრავლის ნებისმიერი $z \in Z$ ელემენტი. რადგან g – სურექციაა, არსებობს ისეთი $y \in Y$ ელემენტი, რომ $g(y) = z$. რადგან f -ც სურექციაა, არსებობს ისეთი $x \in X$, რომ $f(x) = y$. მაშინ, გვექნება: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. ამრიგად, $g \circ f$ – სურექციაა.

2.11.3. შედეგი. თუ $f: X \rightarrow Y$ და $g: Y \rightarrow Z$ ბიექციური ასახვებია, მაშინ მათი $g \circ f: X \rightarrow Z$ კომპოზიციაც ბიექციური ასახვაა.

დამტკიცება პირდაპირ გამომდინარეობს 2.11.1-დან და 2.11.2-დან.

2.11.4. თეორემა. ყოველი ბიექციის შექცეული ასახვა ასევე ბიექციაა.

დამტკიცება ჩაატარეთ დამოუკიდებლად.

2.11.5. განმარტება. X სიმრავლის თავის თავზე ასახვას, რომელიც ყოველ $x \in X$ ელემენტს უთანადებს ამავე x ელემენტს, X სიმრავლის თავის თავზე იგივერი ასახვა ეწოდება და აღინიშნება id_X სიმბოლოთი. ამრიგად (განმარტების თანახმად), ყოველ $x \in X$ -სათვის $id_X(x) = x$.

2.11.5. თეორემა. ყოველი ბიექციური $f : X \rightarrow Y$ ასახვისათვის სამართლიანია შემდეგი:

$$f^{-1} \circ f = id_X \text{ და } f \circ f^{-1} = id_Y.$$

დამტკიცება ჩაატარეთ დამოუკიდებლად.

2.12. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები.

2.12.1. X სიმრავლეს ეწოდება **თვლადი**, თუ არსებობს ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლის ერთი მაინც $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ ბიექცია ამ X სიმრავლეზე.

შევნიშნოთ, რომ თვითონ $\mathbb{N}$ სიმრავლე თვლადია. რატომ?

უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც არ არის თვლადი, **არათვლად** სიმრავლეს უწოდებენ.

ვთქვათ, X – რაიმე თვლადი სიმრავლეა, ანუ არსებობს ბიექცია: $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. მაშინ, ცხადია, $X = \{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$. ავირჩიოთ ლათინური ანბანის რომელიმე ასო, მაგალითად, „ x “ და (ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სათვის) $f(n)$ -ის ნაცვლად დავწეროთ: x_n . მაშინ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. ამრიგად, ყოველი თვლადი სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია „გადავწეროთ“ ნატურალური რიცხვების საშუალებით.

2.12.2. თუ არსებობს ბიექცია $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, მაშინ არსებობს $g : X \rightarrow \mathbb{N}$ ბიექციაც: g -ს როლში შეგვიძლია განვიხილოთ, მაგალითად, f^{-1} ასახვა (იხ 2.11.4).

2.12.3. ყველა მთელ დადებით ლუწ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, რადგან, მაგალითად, ასახვა $f : \mathbb{N} \rightarrow \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ სადაც ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სათვის $f(n) = 2n$, ბიექციაა. ანალოგიურად, ასახვა $f(n) = 2n - 1$ წარმოადგენს ბიექციას $\mathbb{N}$ -დან ყველა კენტ მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეზე (ანუ, ყველა კენტ რიცხვთა $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots\}$ სიმრავლეც თვლადია).

2.12.4. ყველა რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე თვლადია. მართლაც, ჯერ ვაჩვენოთ რომ ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია (აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე $\mathbb{Q}_+$ -ით).

განვიხილოთ შემდეგი „უსასრულო“ ცხრილი:

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	...
.....					

ამ ცხრილის პირველ სტრიქონში თანმიმდევრობით ჩამოწერილია ყველა ის დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 1-ის ტოლია, მე-2 სტრიქონში – ყველა ის რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 2-ის ტოლია, მე-3 სტრიქონში – ყველა ის რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 3-ის ტოლია და ა. შ. ცხადია, ყოველი სტრიქონი უსასრულოა და სტრიქონების „რაოდენობაც“ უსასრულოა („თვლადია“). ამასთან, ყოველი დადებითი რაციონალური რიცხვი გვხვდება უსასრულო „რაოდენობის“ სტრიქონებში. მაგალითად, რიცხვი 1 გვხვდება ყველა სტრიქონში (ცხრილის

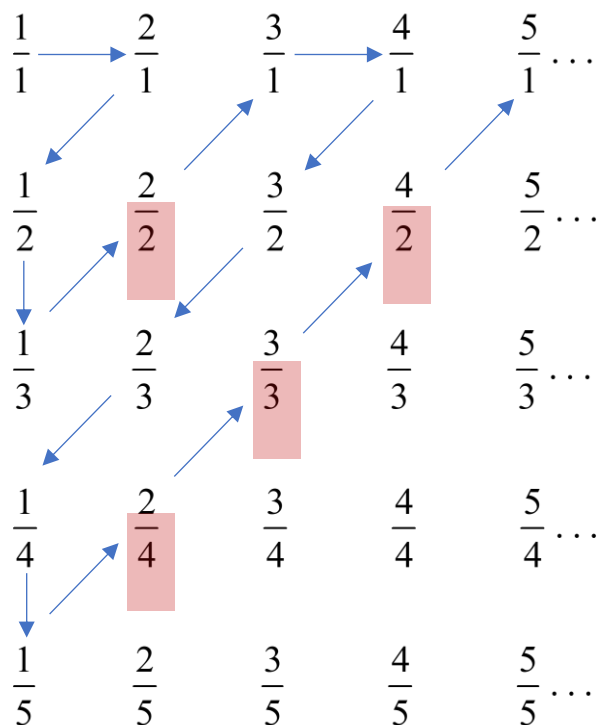
„დიაგონალზე“), რიცხვი $\frac{1}{2}$ გვხვდება ბეზოდან

მე-2, მე-4, მე-6 და ა. შ. სტრიქონებში და ა. შ.

ქვემოთ მოცემულ სქემაზე ისრებით ნაჩვენებია შესაბამისობის გარკვეული წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება ცალსახად განსაზღვრული (დადებითი) რაციონალური რიცხვი. ეს წესი ასე უნდა გავიგოთ: ნატურალურ რიცხვ 1-ს შეესაბამოთ პირველი სტრიქონის პირველი ელემენტი, ანუ რაციონალური რიცხვი $\frac{1}{1}=1$.

შემდეგ უნდა „გაყვეთ“ სქემაზე გამოსახულ ისრებს და ყოველ შემდეგ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამოთ ამ ცხრილში „ისრების მიმართულებით მოძრაობისას“ პირველი შემხვედრი ის რაციონალური რიცხვი, რომელიც აქამდე არ „შეგვხვედრია“. ასე, მაგალითად, 2-ს ამ წესით შეესაბამება რიცხვი $\frac{2}{1}=2$, 3-ს

შეესაბამება რიცხვი $\frac{1}{2}$, 4-ს შეესაბამება $\frac{1}{3}$.



ვნახოთ რომელი რიცხვი შეესაბამება 5-ს. $\frac{1}{3}$ -ის შემდეგ, სქემის მიხედვით, „მოდის“ რიცხვი $\frac{2}{2} = 1$ რომელიც უკვე შეგვხვდა ზემოთ ერთ-ერთ (კერძოდ, პირველ) სტრიქონში. ამიტომ $\frac{2}{2}$ -ს „ვტოვებთ“, გადავდივართ (ისრების მიმართულებით) შემდეგ რიცხვზე (ანუ $\frac{3}{1}$ -ზე), რომელიც აქამდე არ შეგვხვედრია და 5-ს შევუსაბამებთ სწორედ ამ რაციონალურ რიცხვს (ანუ, $\frac{3}{1} = 3$ -ს). ამ პროცესს ვაგრძელებთ უსასრულოდ.

რომელი რაციონალური რიცხვები შეესაბამება ამ წესით 6-ს? 7-ს? 8-ს? 9-ს? 10-ს? 11-ს? (წითელი ფერით ამ ცხრილში მონიშნულია პირველი რამდენიმე რაციონალური რიცხვი, რომლებიც უნდა გამოვტოვოთ ისრების მიმართულებით „მოძრაობისას“).

ცხადია, აღწერილი წესის მიხედვით, ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი (დადებითი) რაციონალური რიცხვი. მაშასადამე, ეს წესი წარმოადგენს ფუნქციას $\mathbb{N}$ -დან $\mathbb{Q}_+$ -ში. ამასთან ნათელია, რომ ეს ფუნქცია ყოველ ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ნატურალურ რიცხვს უთანადებს განსხვავებულ რაციონალურ რიცხვებს, ანუ, რომ ეს ასახვა ინექციაა. გარდა ამისა, ყოველი (დადებითი) რაციონალური რიცხვი სადღაც (და თან არაერთგზის) გვხვდება ამ ცხრილში; ამასთან, აღწერილი წესი ისეთია, რომ სასრული ნაბიჯების შემდეგ აუცილებლად „მივადგებით“ ამ რიცხვს. ამიტომ ეს ასახვა სურექციაცაა. მაშასადამე, აღწერილი ასახვა ბიექციაა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეც თვლადია. მართლაც, რადგან ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, ეს რიცხვები შეგვიძლია „გადავზომოთ“ ნატურალური რიცხვებით: $\mathbb{Q}_+ = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \dots\}$. ამოვწეროთ $\mathbb{Q}_+$ სიმრავლის ელემენტები უსასრულო სტრიქონის სახით:

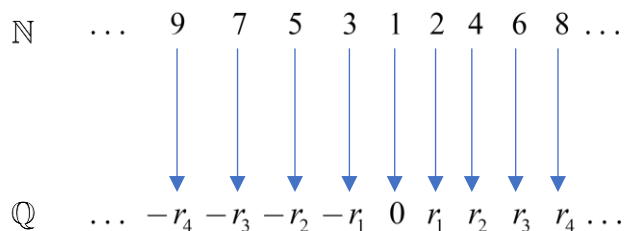
$$r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$$

ამ სტრიქონში r_1 -ს მარცხნიდან მივუწეროთ რიცხვი 0, შემდეგ 0-ს მარცხნიდან მივუწეროთ r_1 -ის მოპირდაპირე რიცხვი ($-r_1$), შემდეგ ($-r_1$)-ს მარცხნიდან მივუწეროთ r_2 -ის მოპირდაპირე რიცხვი ($-r_2$) და ასე გავაგრძელოთ უსასრულოდ. მივიღებთ რიცხვების სტრიქონს, რომელიც უსასრულოდ გრძელდება როგორც მარცხნივ, ისე მარჯვნივ:

$$\dots, -r_4, -r_3, -r_2, -r_1, 0, r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$$

შევნიშნოთ რომ ამ (ორივე მხრივ უსასრულო) სტრიქონში ჩაწერილი ყოველი რიცხვი რაციონალურია. ამასთან, ყოველი რაციონალური რიცხვი გვხვდება ამ სტრიქონში (თანაც, ზუსტად ერთხელ). სხვა სიტყვებით, $\mathbb{Q} = \{\dots, -r_4, -r_3, -r_2, -r_1, 0, r_1, r_2, r_3, r_4, \dots\}$.

ახლა $\dots, -r_4, -r_3, -r_2, -r_1, 0, r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ სტრიქონში ამოწერილი რიცხვები გადავზომოთ ნატურალური რიცხვებით, ანუ, ყოველ ნატურალურ რიცხვს შევუსაბამოთ აღნიშნულ სტრიქონში ჩაწერილი ცალსახად განსაზღვრული (რაციონალური) რიცხვი. შესაბამისობის ერთ-ერთი ასეთი წესი (რომელიც წარმოადგენს ბიექციას $\mathbb{N}$ -სა $\mathbb{Q}$ -ზე) აღწერილია სქემაზე ქვემოთ:



2.12.5. დავამტკიცოთ, რომ სიმრავლე $(0;1)$ (და მით უმეტეს $\mathbb{R}$) არათვლადია. ეს დებულება ცნობილია კანტორის თეორემის სახელწოდებით და მტკიცდება „კანტორის დიაგონალური მეთოდის“ საშუალებით. ქვემოთ მოგვყავს ეს დამტკიცება.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ყოველი ირაციონალური რიცხვი $(0;1)$ ღია ინტერვალიდან შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით, ხოლო ყოველი რაციონალური რიცხვი – სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით. ამასთან, ყოველ სასრულ ათწილადსაც $(0;1)$ ინტერვალიდან შეგვიძლია შევხედოთ როგორც უსასრულო ათწილადს, სადაც რომელიღაც ათწილადი ნიშნიდან დაწყებული, სულ 0-ები გვხვდება ან ისეთ უსასრულო პერიოდულ ათწილადს, რომლის პერიოდი 9-ის ტოლია (რადაც ადგილიდან დაწყებული სულ 9-იანები მეორდება)⁷. იმისათვის რომ ეს ორამბროვნება ავიცილოთ, მსჯელობაში ქვემოთ ეს უკანასკნელი შემთხვევა გამოვრიცხოთ.

ახლა დავიწყოთ კანტორის თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ, საწინააღმდეგო, ვთქვათ $(0;1)$ თვლადია. მაშინ (იხ. 2.12.1) $(0;1)$ სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია გადავწეროთ ნატურალური რიცხვების საშუალებით, ანუ, ეს სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით: $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

ყოველი x_n -სათვის (რომლის მთელი ნაწილიც, ცხადია, 0-ის ტოლია) შესაძლებელია დავაფიქსიროთ მისი წარმოდგენა უსასრულო ათწილადის სახით. ვთქვათ, ეს წარმოდგენაა: $x_n = 0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\alpha_{n4} \dots \alpha_{nn} \dots$, სადაც ყოველი k -სათვის α_{nk} აღნიშნავს x_n -ის წარმოდგენაში k -ურ ათწილად ნიშანს (მძიმის შემდეგ).

ჩამოვწეროთ ეს რიცხვები ერთმანეთის ქვემოთ სვეტის სახით:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14} \dots \alpha_{1n} \dots \\
 x_2 = 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24} \dots \alpha_{2n} \dots \\
 x_3 = 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34} \dots \alpha_{3n} \dots \\
 x_4 = 0, \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\alpha_{44} \dots \alpha_{4n} \dots \\
 \dots\dots\dots \\
 x_n = 0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\alpha_{n4} \dots \alpha_{nn} \dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

⁷ მაგალითად, სასრული ათწილადი $0,1$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც $0,10000 \dots$ უსასრულო ათწილადის, ისე $0,09999 \dots$ უსასრულო ათწილადის სახით.

ჩვენი დაშვების თანახმად, ამ სვეტში ჩამოწერილი რიცხვები უნდა ამოწურავდნენ მთელ $(0;1)$ ღია ინტერვალს.

ახლა დავაკვირდეთ „დიაგონალზე“ მდგომ ათწილად ნიშნებს (რომლებიც წითელი ფერითაა მონიშნული და განვიხილოთ რიცხვი: $x = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots \beta_n \dots$ რომლის (უსასრულო) ათწილად წარმოდგენაში n -ური ათწილადი ნიშანი $\beta_n = 5$, თუ $\alpha_n \neq 5$ და $\beta_n = 4$, თუ $\alpha_n = 5$.

ერთი მხრივ, ცხადია, რომ ეს $x \in (0;1)$ და ამიტომ ის უნდა ფიგურირებდეს $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ ჩამონათვალში. მეორე მხრივ კი, აგების თანახმად, ეს რიცხვი არ უდრის არც ერთ რიცხვს ამ ჩამონათვალიდან. მაგალითად, x არ უდრის x_1 -ს, რადგან განსხვავდება მათი პირველი ათწილადი ნიშნები მძიმის შემდეგ: $\beta_1 = 5$, თუ $\alpha_{11} \neq 5$ და $\beta_1 = 4$, თუ $\alpha_{11} = 5$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ 1-ზე მეტი ნებისმიერი n -სათვის $x \neq x_n$. ამიტომ, ეს x რიცხვი ვერ იქნება $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ ჩამონათვალში.

მივიღეთ წინააღმდეგობა, რომელიც უჩვენებს იმას, რომ ჩვენი დაშვება $(0;1)$ სიმრავლის თვლადობის შესახებ არ არის მართებული.

ამრიგად, $(0;1)$ – არათვლადი სიმრავლეა.

2.13. ასახვის შეზღუდვა განსაზღვრის არის ქვესიმრავლეზე.

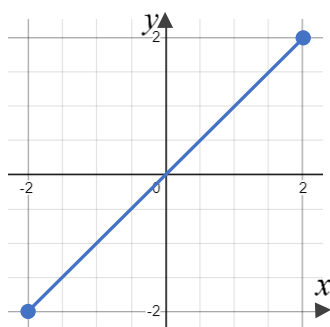
ვთქვათ, $f: X \rightarrow Y$ რაიმე ასახვაა და A არის ამ ასახვის X განსაზღვრის არის რაიმე ქვესიმრავლე: $A \subset X$. განვიხილოთ ასახვა A -დან Y -ში, რომელიც აღნიშნება $f|_A$ სიმბოლოთი და რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად: ყოველი $x \in A$ -სათვის $(f|_A)(x) = f(x)$. ასე განმარტებულ

$$f|_A: A \rightarrow Y$$

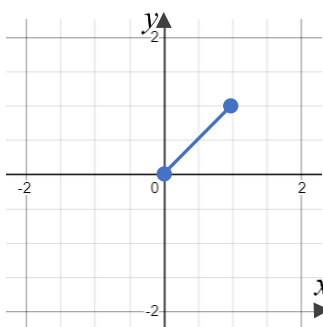
ასახვას ეწოდება f ასახვის **შეზღუდვა** მისი (f -ის) განსაზღვრის არის A ქვესიმრავლეზე.

ამრიგად, $f|_A: A \rightarrow Y$ ასახვა მოქმედებს ისევე როგორც f იმ განსხვავებით, რომ განსაზღვრის არედ მიჩნეულია არა მთელი X სიმრავლე, არამედ მისი A ქვესიმრავლე.

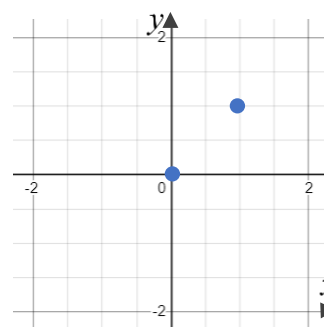
მე-9(ა) ნახაზზე მოცემულია $[-2; 2]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x) = x$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. მე-9(ბ) ნახაზზე მოცემულია ამ ფუნქციის განსაზღვრის არის $[0; 1]$ ქვესიმრავლეზე შეზღუდვის გრაფიკი, ხოლო მე-9(გ) ნახაზზე აღნიშნული ფუნქციის განსაზღვრის არის $\{0, 1\}$ ორწერტილიან ქვესიმრავლეზე შეზღუდვის გრაფიკი.



ნახაზი 9(ა)



ნახაზი 9(ბ)



ნახაზი 9(გ)

2.14. ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის პროექციები თანამრავლებზე.

ვთქვათ, X და Y ნებისმიერი ორი სიმრავლეა. ახლა ჩვენ განვმარტავთ ორ $pr_1 : X \times Y \rightarrow X$ და $pr_2 : X \times Y \rightarrow Y$ ასახვას, რომელთაგან პირველს ეწოდება $X \times Y$ სიმრავლის **პროექცია X -ზე** (ან, პირველი პროექცია) მეორეს კი – $X \times Y$ სიმრავლის **პროექცია Y -ზე** (ან, მეორე პროექცია).

განმარტების თანახმად, ყოველი $(x, y) \in X \times Y$ წყვილისათვის $pr_1(x, y) = x$ და $pr_2(x, y) = y$.

მაგალითად, ვთქვათ, $X = Y = [0; 1]$. მაშინ, $pr_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right) = \frac{1}{2}$ და $pr_2\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$.

2.15. მოცემული სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე.

ვთქვათ, X – ნებისმიერი სიმრავლეა. როგორც აღვნიშნეთ (იხ. 1.4), $\mathcal{P}(X)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა, რომელიც დამტკიცებულია გეორგ კანტორის მიერ 1891 წელს.

თეორემა. არცერთი X სიმრავლისათვის არ არსებობს სურექციული და, მით უმეტეს, ბიექციური ასახვა X -დან $\mathcal{P}(X)$ -ზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს ბიექციური ასახვა $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

განვიხილოთ X სიმრავლის ასეთი A ქვესიმრავლე:

$$A = \{x \mid x \in X \text{ და } x \notin f(x)\}.$$

ამრიგად, A სიმრავლე შედგება X სიმრავლის ყველა ისეთი x ელემენტებისაგან, რომელთაგან თითოეული არ ეკუთვნის X -ის იმ ქვესიმრავლეს, რომელშიც f ასახვას გადაჰყავს ეს x ელემენტი. შევნიშნოთ, რომ თუ ისეთი $x \in X$, რომ $x \notin f(x)$ არ არსებობს, მაშინ A სიმრავლე ცარიელი იქნება, მაგრამ ყველა შემთხვევაში, A იქნება X -ის ქვესიმრავლე.

რადგან A არის X -ის ქვესიმრავლე, ამიტომ $A \in \mathcal{P}(X)$. მაშასადამე, იმის გამო, რომ (დაშვების თანახმად) $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ასახვა ბიექციაა, ის, კერძოდ, სურექციაა და, მაშასადამე, უნდა არსებობდეს X სიმრავლის ისეთი x_0 ელემენტი, რომ $f(x_0) = A$.

რადგან $x_0 \in X$ და $A \subset X$, აუცილებლად ინდა გვქონდეს: $x_0 \in A$ ან $x_0 \notin A$.

ვთქვათ, $x_0 \in A$. მაშინ A სიმრავლის განმარტების თანახმად უნდა გვქონდეს: $x_0 \notin f(x_0)$. მაგრამ $f(x_0) = A$ და ე. ი. ვღებულობთ: $x_0 \notin A$. ეს კი წინააღმდეგობაა, რადგან ჩვენ დავუშვით, რომ $x_0 \in A$.

ვთქვათ, ახლა, $x_0 \notin A$. მაშინ (კვლავ A სიმრავლის განმარტების თანახმად) არ უნდა იყოს შესრულებული $x_0 \in f(x_0)$, ანუ უნდა გვქონდეს $x_0 \in f(x_0)$ და რადგან $f(x_0) = A$, უნდა გვქონდეს $x_0 \in A$, რაც ასევე წინააღმდეგობაა, რადგან ჩვენი დაშვების თანახმად, $x_0 \notin A$.

ამრიგად მივიღეთ, რომ $x_0 \in A$ და $x_0 \notin A$ შემთხვევებიდან არცერთი არ სრულდება. ეს კი შეუძლებელია. მიღებული წინააღმდეგობა უჩვენებს იმას, რომ ჩვენი თავდაპირველი დაშვება ბიექციური $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ასახვის არსებობის შესახებ მცდარია, ანუ ასეთი ასახვა არ არსებობს. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ყოველი X სიმრავლისათვის არსებობს ინექციური ასახვა X სიმრავლიდან $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლეში (უხეშად რომ ვთქვათ, ყოველი X სიმრავლისათვის $\mathcal{P}(X)$ სიმრავლე შეიცავს X სიმრავლის ბიექციურ „ასლს“).

დამტკიცება. განვიხილოთ $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ასახვა, რომელიც ყოველ $x \in X$ ელემენტს უთანადებს X სიმრავლის 1-ელემენტიან ქვესიმრავლეს, რომლის ერთადერთი ელემენტია x . ამრიგად (ყოველ $x \in X$ -სათვის), $f(x) = \{x\}$. მარტივად მოწმდება, რომ ეს ასახვა ინექციაა.

2.16. სავარჯიშო მაგალითები

2.16.1. მოცემულია შესაბამისობის წესი, რომელიც ყოველ ნატურალურ n რიცხვს უთანადებს ყოველ n -ნიშნა ნატურალურ რიცხვს. არის თუ არა შესაბამისობის ეს წესი ფუნქცია $\mathbb{N}$ სიმრავლიდან $\mathbb{N}$ სიმრავლეში?

2.16.2. ჩამოაყალიბეთ, რას ნიშნავს, რომ ერთი და იმავე განსაზღვრის არეებისა და ერთი და იმავე მნიშვნელობათა არეების მქონე ორი ფუნქცია არ არის ერთმანეთის ტოლი.

2.16.3. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები.

ა) $y = 3x - 1$.

ბ) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

გ)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 0 \\ 0, & \text{თუ } x = 0 \\ -1, & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$$

2.16.4. ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა)
$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{თუ } -2 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{თუ } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

ბ) $f(x) = [x]$, სადაც ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის $[x]$ აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს⁸.

გ) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

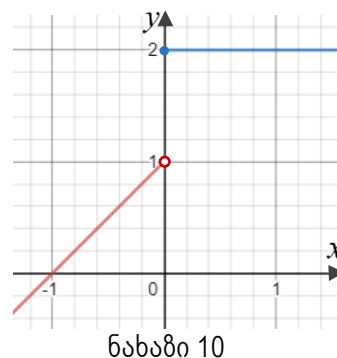
2.16.5. განვიხილოთ $f(x) = x + 0,5$ ფორმულით განსაზღვრული $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია და შემდეგი სიმრავლეები: $A = [-4; 7]$ და $B = \mathbb{Q}$. იპოვეთ $f(A)$, $f(B)$, $f^{-1}(A)$ და $f^{-1}(B)$.

2.16.6. მოცემულია ფუნქცია: $f(x) = x^2 - 3x + 2$. იპოვეთ $f(\{1, 2\})$, $f([1; 2])$, $f([-1; 2])$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([4; 9])$, $f^{-1}([0; 1] \cup [4; 9])$, $f^{-1}([-1; 9])$, $f^{-1}([-4; -1])$.

2.16.7. მოცემულია ფუნქცია: $f(x) = x + \frac{1}{2}$. იპოვეთ $f(\mathbb{Q})$ და $f^{-1}(\mathbb{Q})$.

გ) მოცემულია ფუნქცია: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{თუ } x < 0 \\ 2, & \text{თუ } x \geq 0 \end{cases}$ (იხ. ნახაზი 10).

იპოვეთ $f(-1; 0)$, $f(-1; 0]$, $f(-\infty; +\infty)$, $f^{-1}(0; 1)$, $f^{-1}\{2\}$, $f^{-1}(-\infty; 1) \cup \{2\}$, $f^{-1}[3; 4]$.



2.16.8. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი (ისევე, როგორც ნებისმიერი ორი ღია) შუალედი ერთმანეთის ბიექციურია.

2.16.9. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ღია ინტერვალი $\mathbb{R}$ -ის ბიექციურია.

2.16.10. ააგეთ ბიექცია $[0; 1]$ სიმრავლიდან $(0; 1]$ სიმრავლეზე.

2.16.11. დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = 3x - 5$ ფორმულით განსაზღვრული $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია ბიექციაა. შესაბამისად, მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. იპოვეთ $f^{-1}(0)$ და $f^{-1}(-5)$.

2.16.12. ოთახში სულ 10 სხვადასხვა ადამიანია. აღვნიშნოთ ეს ადამიანები $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ სიმბოლოებით.

მათი გვარები და სახელები მოცემულია ცხრილში ქვემოთ:

⁸ შეგახსენებთ, რომ x ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება ისეთ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც მოცემულ x რიცხვს არ აღემატება. მაგალითად, განვიხილოთ რიცხვი $x = 5,2$. ცხადია, არსებობს უსასრულო რაოდენობა ისეთი მთელი რიცხვებისა, რომლებიც $5,2$ -ს არ აღემატება. ასეთია 5 -ზე ნაკლები ან ტოლი თითოეული მთელი რიცხვი (და მხოლოდ ისინი). ამ მთელ რიცხვებს შორის უდიდესია რიცხვი 5 . ამიტომ, $[5, 2] = 5$. მეორე მაგალითი: ვთქვათ, $x = -3,7$. ამ რიცხვს არ აღემატება ის და მხოლოდ ის მთელი რიცხვები, რომელთაგან თითოეული ნაკლებია ან ტოლია (-4) -ზე. მათ შორის უდიდესი კი (-4) -ია. ამიტომ, $[-3, 7] = -4$. ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი მთელი რიცხვი n რიცხვისათვის $[n] = n$.

ადამიანი	გვარი	სახელი
a_1	არეშიძე	გიორგი
a_2	ბერიძე	მანანა
a_3	გოგოლაძე	კონსტანტინე
a_4	დვალი	ეკატერინე
a_5	ენუქიძე	დავითი
a_6	ვასაძე	მანანა
a_7	ზერეკიძე	დიმიტრი
a_8	თოდრია	ირაკლი
a_9	ინგოროყვა	დიმიტრი
a_{10}	კაპანაძე	ლუკა

ყველა ამ ადამიანთა სიმრავლე აღვნიშნოთ X ასოთი: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$.

Y ასოთი კი აღვნიშნოთ ყველა ქართული სიტყვების სიმრავლე (ზემოთ ჩამოთვლილი თითოეული ადამიანის როგორც გვარი, ისე სახელი ქართული სიტყვაა!).

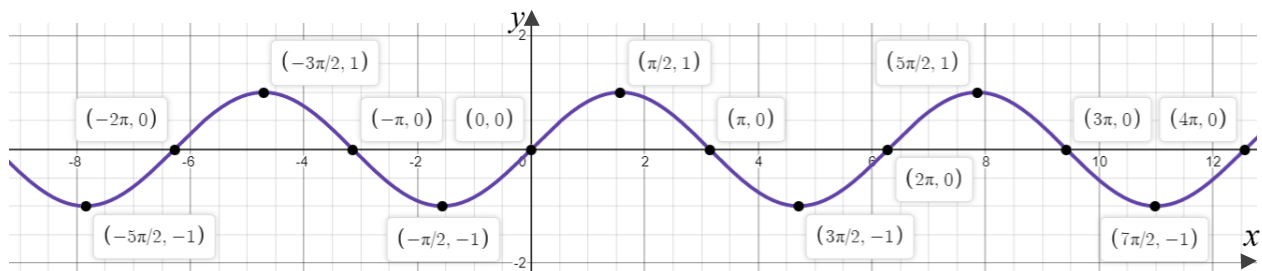
განვიხილოთ ასეთი ორი $f: X \rightarrow Y$ და $g: X \rightarrow Y$ ასახვა:

X სიმრავლეში შემავალ ყოველ ადამიანს f ასახვით შევუსაბამოთ ამ ადამიანის სახელი, ხოლო g ასახვით – ამ ადამიანის გვარი. მაგალითად, $f(a_9) = \text{დიმიტრი}$ და $g(a_9) = \text{ინგოროყვა}$.

არის თუ არა f ასახვა ინექცია? სურექცია?

არის თუ არა g ასახვა ინექცია? სურექცია?

2.16.13. მოცემულია $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $f(x) = \sin x$ ფორმულით (მისი გრაფიკი სქემატურად მოცემულია მე-11 ნახაზზე).



ნახაზი 11

გრაფიკის მიხედვით, დაინახეთ, რომ ქვემოთ ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან

$$f|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}; \quad f|_{(0; \pi)}; \quad f|_{\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]}$$

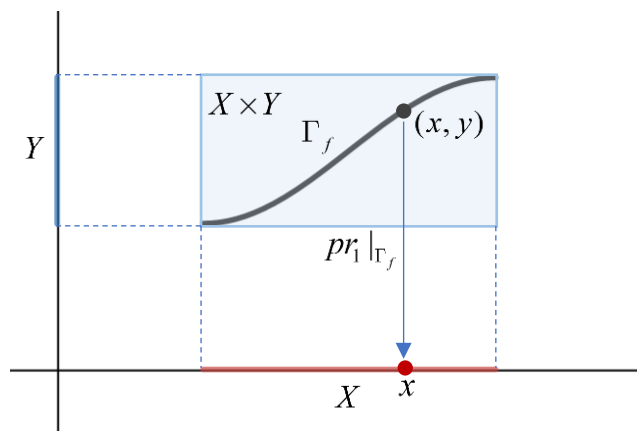
პირველი და მესამე ბიექციებია, მეორე კი – არა. შევნიშნოთ, რომ $f|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ ბიექციური ფუნქციის შექცეული ასახვა (როგორც ეს სასკოლო მათემატიკის კურსიდან არის ცნობილი) აღინიშნება $\arcsin$ სიმბოლოთი.

2.16.14. ვთქვათ, $f : X \rightarrow Y$ ნებისმიერი ასახვაა. განვიხილოთ $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის შემდეგი ქვესიმრავლე: $\Gamma_f = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, y = f(x)\}$.

ცხადია, $\Gamma_f \subset X \times Y$. განვიხილოთ $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის $pr_1 : X \times Y \rightarrow X$ პროექცია X -ზე ამ პროექციის $pr_1|_{\Gamma_f}$ შეზღუდვა Γ_f -ზე. ამრიგად, ყოველი $(x, y) \in \Gamma_f$ -სათვის,

$$(pr_1|_{\Gamma_f})(x, y) = pr_1(x, y) = x \quad (\text{იხ. ნახაზი 12}).$$

არის თუ არა ეს ასახვა ინექცია? სურექცია? ბიექცია?



ნახაზი 12