

## §9. წრფე სიბრტყეზე.

(მოკლე ვერსია)

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ რამდენიმე (შესაძლოა თქვენთვის უკვე ნაცნობ) განმარტებას, რომლებიც დაგვჭირდება სამომავლოდ.

### 9.1. წრფის ზოგადი განტოლება სიბრტყეზე.

სიბრტყეს, რომელზედაც დაფიქსირებულია რაიმე მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა, საკოორდინატო სიბრტყე ვუწოდოთ.

**9.1.1. თეორემა.** საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე ყოველი წრფე მოიცემა

$$Ax + By = C$$

განტოლებით, სადაც  $A^2 + B^2 \neq 0$ .

უფრო ზუსტად,

1) სიბრტყეზე მდებარე ყოველი წრფისთვის მოიძებნება ისეთი  $A$ ,  $B$  და  $C$  რიცხვები (კოეფიციენტები), რომ  $A^2 + B^2 \neq 0$  და, ამასთან, სიბრტყეზე მდებარე  $P(x; y)$  წერტილი მესს მოცემულ წრფეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $Ax + By = C$

და

2) თუ მოცემულია (1) სახის განტოლება (სადაც  $A^2 + B^2 \neq 0$ ), მაშინ სიბრტყის ყველა იმ  $P(x; y)$  წერტილთა ერთობლიობა, რომელთათვისაც  $Ax + By = C$ , ქმნის წრფეს.

**9.1.2. შენიშვნა.**  $Ax + By = C$  ( $A^2 + B^2 \neq 0$ ) და  $A_1x + B_1y = C_1$  ( $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$ ) განტოლებებით განისაზღვრება ერთი და იგივე წრფე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი კოეფიციენტები ერთმანეთის პროპორციულია, ანუ როცა არსებობს ისეთი არანულოვანი  $k$  რიცხვი, რომ  $A_1 = kA$ ,  $B_1 = kB$  და  $C_1 = kC$ .

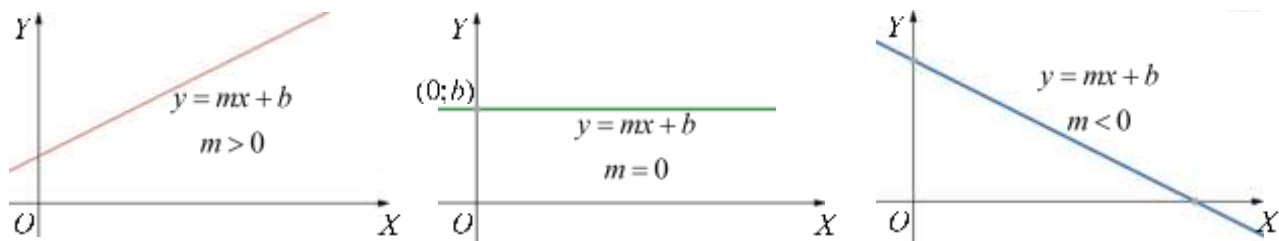
**9.1.3. განმარტება.**  $Ax + By = C$  ( $A^2 + B^2 \neq 0$ ) სახის განტოლებას (სიბრტყეზე) **წრფის ზოგადი განტოლება** ეწოდება.

**9.1.4. შენიშვნა.** საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე ყოველი წრფე, რომელიც არ არის  $OY$  ღერძის პარალელური, მოიცემა

$$y = mx + b$$

ამასთან (იხ. ნახაზი ქვემოთ),

- თუ  $m > 0$ , მაშინ  $f(x) = mx + b$  ფუნქცია (მკაცრად) ზრდადია;
- თუ  $m < 0$ , მაშინ  $f(x) = mx + b$  ფუნქცია (მკაცრად) კლებადია;
- თუ  $m = 0$ , მაშინ  $f(x) = mx + b$ .



**9.2.1. განმარტება.** განვიხილოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე  $L$  წრფე, რომელიც არ არის საკოორდინატო სისტემის  $OY$  ღერძის პარალელური (იხ. ნახაზი 6). შევარჩიოთ ამ წრფეზე ორი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული  $P_1(x_1; y_1)$  და  $P_2(x_2; y_2)$  წერტილი. რადგან  $L$  წრფე არ არის  $OY$  ღერძის პარალელური, ამიტომ  $x_2 - x_1 \neq 0$ .

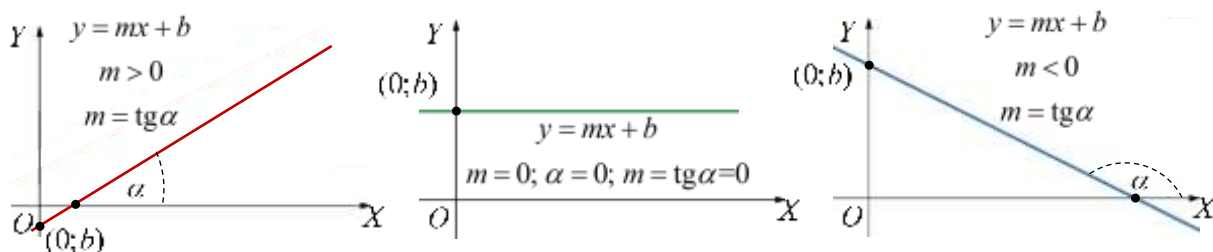
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  რიცხვს  $L$  წრფის **დახრილობა** (ან, **საკუთხო კოეფიციენტი**) ეწოდება.

**9.2.2. შენიშვნა.** 9.2.1 პუნქტში მოყვანილი განმარტება კორექტულია, რაც ნიშნავს იმას, რომ  $m$  რიცხვი არ არის დამოკიდებული  $P_1(x_1; y_1)$  და  $P_2(x_2; y_2)$  წერტილების შერჩევაზე.

**9.2.3. შენიშვნა.** 9.2.1 განმარტების მიხედვით, ყოველ წრფეს სიბრტყეზე, რომელიც არ არის  $OY$  ღერძის პარალელური, ცალსახად შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ამ წრფის დახრილობა (ან, საკუთხო კოეფიციენტი) ეწოდება. ვერტიკალური (ანუ  $OY$  ღერძის პარალელური) წრფის დახრილობა არ განიმარტება. ზოგჯერ (გარკვეული მოსაზრების გამო) ამბობენ, რომ ასეთი წრფის დახრილობა უსასრულობის ( $\infty$ ) ტოლია.

**9.2.4. შენიშვნა.** თუ წრფე მოცემულია  $y = mx + b$  სახის განტოლებით, მაშინ მისი დახრილობა (საკუთხო კოეფიციენტი)  $m$ -ის ტოლია და ეს წრფე საკოორდინატო სისტემის  $OY$  ღერძს კვეთს  $(0; b)$  წერტილში.

**9.2.5. შენიშვნა.** თუ წრფე არ არის  $OY$  ღერძის პარალელური, მისი  $m$  დახრილობა ტოლია იმ  $\alpha$  კუთხის ტანგენსისა, რომელსაც ადგენს ეს წრფე  $OX$  ღერძის დადებით მიმართულებასთან ( $0 \leq \alpha < \pi$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ). ამასთან, ვთვლით, რომ  $\alpha = 0$ , თუ წრფე პარალელურია  $OX$  ღერძის (იხ. ნახაზი ქვემოთ).



### 9.3. მოცემულ წერტილზე გამავალი, მოცემული დახრილობის მქონე წრფის განტოლება.

9.3.1. ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია რაიმე  $P(x_0; y_0)$  წერტილი და რაიმე ნამდვილი რიცხვი  $m$ .

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

წარმოადგენს იმ წრფის განტოლებას, რომელიც გადის  $P(x_0; y_0)$  წერტილზე და რომლის დახრილობაც  $m$ -ის ტოლია.

### 9.4. ორი წრფის პარალელობის პირობა.

9.4.1. წინადადება. ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ორი  $L_1$  და  $L_2$  წრფე, რომელთა დახრილობებია, შესაბამისად,  $m_1$  და  $m_2$  რიცხვები. ეს წრფეები პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $m_1 = m_2$ .

### 9.5. ორი წრფის მართობულობის პირობა.

9.5.1. წინადადება. ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ორი  $L_1$  და  $L_2$  წრფე, რომელთა დახრილობებია, შესაბამისად,  $m_1$  და  $m_2$  რიცხვები, სადაც  $m_1 \neq 0$  და  $m_2 \neq 0$ . ასეთი ორი წრფე ურთიერთმართობულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .

### 9.6. ორ მოცემულ (განსხვავებულ) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.

9.6.1. ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ორი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული  $P_1(x_1; y_1)$  და  $P_2(x_2; y_2)$  წერტილი. სამართლიანია შემდეგი:

- თუ  $x_1 \neq x_2$  და  $y_1 = y_2$ , მაშინ  $P_1(x_1; y_1)$  და  $P_2(x_2; y_2)$  წერტილებზე გამავალი წრფის (ერთ-ერთი) განტოლებაა:

$$y = y_1.$$

- თუ  $x_1 = x_2$  და  $y_1 \neq y_2$ , მაშინ  $P_1(x_1; y_1)$  და  $P_2(x_2; y_2)$  წერტილებზე გამავალი წრფის (ერთ-ერთი) განტოლებაა:

$$x = x_1.$$

- თუ  $x_1 \neq x_2$  და  $y_1 \neq y_2$  მაშინ  $P_1(x_1; y_1)$  და  $P_2(x_2; y_2)$  წერტილებზე გამავალი წრფის (ერთ-ერთი) განტოლებაა:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

---

<sup>1</sup> სიტყვა „ერთ-ერთი“ აქ იმიტომია ნახმარი, რომ თუ  $y = y_1$  მოცემული წრფის განტოლებაა, მაშინ, ნებისმიერი არანულოვანი  $k$  რიცხვისათვის,  $ky = ky_1$  განტოლებაც მოცემული წრფის განტოლება იქნება. ფორმალურად კი, სხვადასხვა  $k$ -ებისათვის, ეს განტოლებები ერთმანეთისაგან განსხვავდება.

## 9.7. სავარჯიშოები.

9.7.1. იპოვეთ მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის დახრილობა (საკუთხო კოეფიციენტი).

ა)  $(1;3)$  და  $(5;6)$ ;      ბ)  $(-1;0)$  და  $(2;-1)$ ;      გ)  $(-5;1)$  და  $(10;1)$ .

9.7.2. შეადგინეთ მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.

ა)  $(1;\sqrt{3})$  და  $(8;\sqrt{3})$ ;      ბ)  $(-2;5)$  და  $(-2;7)$ ;      გ)  $(1;2)$  და  $(2;3)$ ;      დ)  $(-2;3)$  და  $(1;0)$ .

9.7.3. იპოვეთ  $3x - 2y = -1$  და  $2x + y = 4$  განტოლებებით მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

9.7.4. იპოვეთ  $(-1;1)$  წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომლის დახრილობაა  $(-1)$ -ის ტოლია.

9.7.5. იპოვეთ  $3x + 4y = 12$  განტოლებით მოცემული წრფის დახრილობა და ამ წრფის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

9.7.6. შეადგინეთ მოცემულ  $P$  წერტილზე გამავალი, მოცემული  $L$  წრფის პარალელური წრფის განტოლება.

ა)  $P = (0;0)$ ,  $L: y = -x + 2$ ;

ბ)  $P = (-2;2)$ ,  $L: 2x + y = 4$ ;

გ)  $P = (-2;4)$ ,  $L: x = 5$ ;

დ)  $P = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ ,  $L: y = 3$ .

9.7.7.  $y$ -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება  $A(-2;3)$  და  $B(4;y)$  წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა  $\left(-\frac{2}{3}\right)$ -ის ტოლი?

9.7.8.  $x$ -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება  $A(-8;-2)$  და  $B(x;2)$  წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა  $2$ -ის ტოლი?

9.7.9. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ადგენს  $L$  წრფე  $Ox$  ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

ა)  $L: y - \sqrt{3} \cdot x = -1$ ;

ბ)  $L: y - x = 7$ ;

გ)  $L: x + y = -3$ ;

დ)  $L: y = \pi$ .

**9.7.10.** იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატები, რომელშიც  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  განტოლებით მოცემული წრფე (სადაც  $a$  და  $b$  ცნობილი არანულოვანი რიცხვებია) კვეთს: ა)  $OX$  ღერძს; ბ)  $OY$  ღერძს.

**9.7.11.** დაწერეთ  $(1;1)$  წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც  $2y + x = 1$  წრფის მართობულია.

**9.7.12.**  $k$ -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება  $2x + ky = 3$  განტოლებით მოცემული წრფე  $x + y = 1$  განტოლებით მოცემული წრფის ა) პარალელური? ბ) მართობული?

**9.7.13.** სიბრტყეზე მოცემულია წრეწირი, რომლის ცენტრია საკოორდინატო სისტემის სათავე და რომლის რადიუსი 5-ის ტოლია.

ა) შეამოწმეთ, რომ  $(-4; -3)$  ამ წრეწირზე ძევს;

ბ) დაწერეთ ამ წრეწირის  $(-4; -3)$  წერტილზე გამავალი მხების განტოლება.

**9.7.14.** საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია სამი წერტილი:  $A(0;2)$ ,  $B(4;-1)$  და  $C(-1;-3,5)$ .

ა) იპოვეთ  $AB$  მონაკვეთის სიგრძე (შეგახსენებთ, რომ ორ განსხვავებულ  $P = P(x_1; y_1)$  და  $Q = Q(x_2; y_2)$  წერტილებს შორის  $d$  მანძილი გამოითვლება ფორმულით:  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ );

ბ) დაწერეთ  $A$  და  $B$  წერტილებზე გამავალი  $L$  წრფის იმ მართობული  $L_1$  წრფის განტოლება, რომელიც გადის  $C$  წერტილზე;

გ) იპოვეთ  $L$  და  $L_1$  წრფეების გადაკვეთის  $D$  წერტილის კოორდინატები;

დ) იპოვეთ მანძილი  $C$  და  $D$  წერტილებს შორის;

ე) იპოვეთ  $ABC$  სამკუთხედის ფართობი.

**9.7.15.**  $d$  მეტრის სიღრმეზე მყვინთავზე მოქმედი წნევა  $p = kd + 1$  ატმოსფეროს ტოლია, სადაც გარკვეული მუდმივია. ცნობილია, რომ თუ  $d = 100$  მ, მაშინ  $p = 10,97$  ატმოსფეროს.

ა) რას უდრის მყვინთავზე მოქმედი წნევა წყლის ზედაპირზე (ანუ, როცა  $d = 0$  მ)?

ბ) რას უდრის მყვინთავზე მოქმედი წნევა 50 მეტრის სიღრმეზე?

**9.7.16.** ტემპერატურის გაზომვა შესაძლებელია ფარენჰეიტის გრადუსებში ( $^{\circ}F$ ), ან ცელსიუსის გრადუსებში ( $^{\circ}C$ ). ამასთან, რომ მათ შორის წრფივი დამოკიდებულებაა, ანუ ამ დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი სახე:  $F = mC + b$ , სადაც  $m$  და  $b$  გარკვეული მუდმივებია. ცნობილია, რომ წყალი იყინება ფარენჰეიტის სკალის მიხედვით 32 გრადუსზე, ხოლო ცელსიუსის სკალის მიხედვით 0 გრადუსზე. ასევე ცნობილია, რომ წყალი დუღს ფარენჰეიტის სკალის მიხედვით 212 გრადუსზე, ხოლო ცელსიუსის სკალის მიხედვით 100 გრადუსზე.

ა) აჩვენეთ, რომ  $m = \frac{9}{5}$  და  $b = 32$ , საიდანაც გამოვა, რომ აღნიშნულ წრფივ დამოკიდებულებას ექნება შემდეგი სახე:  $F = \frac{9}{5}C + 32$  (ან  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ).

ბ) არსებობს თუ არა ისეთი ტემპერატურა, როცა ფარენჰეიტის და ცელსიუსის თერმომეტრი ერთსა და იმავე ჩვენებას იძლევა? დადებითი პასუხის შემთხვევაში, რომელი რიცხვის ტოლია ეს ჩვენება?