

§10. ფუნქციის ზღვარი.

ქვემოთ განხილული ყოველი ფუნქცია ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციაა, ანუ, მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე ყველა ნამდვილ რიცხვთან $\mathbb{R}$ სიმრავლეა, ხოლო განსაზღვრის არე – $\mathbb{R}$ სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეა.

10.1. სიმრავლის დაგროვების წერტილი.

10.1.1. განმარტება. ნამდვილ რიცხვთან სიმრავლის რაიმე D ქვესიმრავლის დაგროვების წერტილი ეწოდება ნამდვილ რიცხვთან ღერძის ისეთ x_0 წერტილს, რომლის ნებისმიერ „სიახლოვეში“ არსებობს D სიმრავლის ერთი მაინც x_0 -საგან განსხვავებული წერტილი. უფრო ზუსტად, ნებისმიერი (რაგინდ მცირე) დადებითი ε რიცხვისათვის, მოიძებნება D სიმრავლის ერთი მაინც ისეთი x წერტილი, რომ $x \neq x_0$ და $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. თვითონ x_0 წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს და შეიძლება არც ეკუთვნოდეს D სიმრავლეს.

$(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ ღია ინტერვალს x_0 წერტილის ε -მიდამოს უწოდებენ. შესაბამისად, ზემოთ მოყვანილი განმარტება ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს: x_0 წერტილს ეწოდება D სიმრავლის დაგროვების წერტილი, თუ x_0 -ის ნებისმიერ (რაგინდ მცირე) ε -მიდამოში მოიძებნება D სიმრავლის ერთი მაინც x_0 -საგან განსხვავებული წერტილი.

10.1.2. განმარტება. წერტილს, რომელიც ეკუთვნის D სიმრავლეს, მაგრამ არ არის D სიმრავლის დაგროვების წერტილი, D სიმრავლის იზოლირებული წერტილი ეწოდება.

10.2. ფუნქციის (სასრული) ზღვარი მისი განსაზღვრის არის დაგროვების წერტილში.

10.2.1. აქ ჩვენ განვმარტავთ, თუ რას ნიშნავს, რომ ნამდვილი რიცხვი A არის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის (სასრული) ზღვარი რაიმე x_0 წერტილში. პირველ რიგში შევნიშნავთ, რომ ფუნქციის ზღვარი განიმარტება მხოლოდ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არის დაგროვების წერტილებში. თუ x_0 არ არის f ფუნქციის განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი, მაშინ ასეთ x_0 წერტილში f ფუნქციის ზღვარი არ განიმარტება.

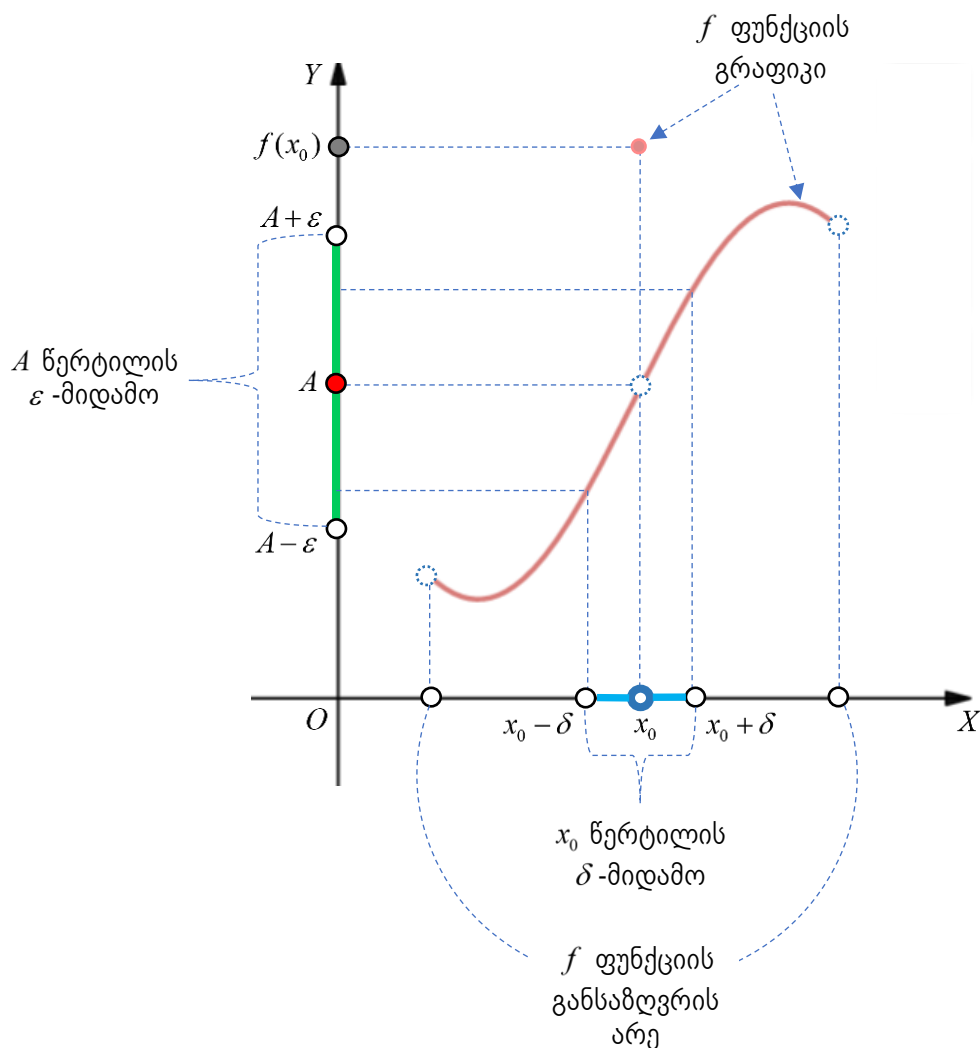
ინტუიციის დონეზე, A რიცხვი არის f ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუკი $f(x)$ -ები „რაგინდ ახლოა“ A -სთან, როცა (x_0 -საგან განსხვავებული) x -ები (f -ის განსაზღვრის არედან) „საკმარისად ახლოა“ x_0 -თან. თვით x_0 წერტილზე ფუნქცია შეიძლება იყოს და შეიძლება არც იყოს განსაზღვრული. ამასთან, თუ f განსაზღვრულია x_0 წერტილზე (ანუ, თუ x_0 ეკუთვნის f -ის განსაზღვრის არეს), ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 -ზე (ანუ, $f(x_0)$) შეიძლება იყოს ან შეიძლება არც იყოს A რიცხვის ტოლი. მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ იმას, თუ როგორ იქცევა $f(x)$ -ები განსაზღვრის არის ისეთი x წერტილებისათვის, რომლებიც საკმარისად ახლოა x_0 -თან და რომლებიც განსხვავდება თვითონ x_0 -საგან: ეს $f(x)$ -ები უნდა „უახლოვდებოდნენ“ A -ს („მიისწრაფოდნენ“ A -სკენ), როცა x -ები „უახლოვდებიან“ x_0 -ს („მიისწრაფვიან“ x_0 -სკენ).

ახლა გადავიდეთ ზუსტ განმარტებებზე.

10.2.2. ზღვრის განმარტება მიდამოების საშუალებით.

ვთქვათ, x_0 არის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი.

A რიცხვს ეწოდება $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის **ზღვარი** f -ის განსაზღვრის არის დაგროვების x_0 წერტილში, თუ A -ს მომცველი ნებისმიერი ε -მიდამოსათვის, ანუ $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ სახის ნებისმიერი ღია ინტერვალისათვის (სადაც $\varepsilon > 0$), არსებობს x_0 წერტილის ისეთი δ -მიდამო, ანუ, $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ სახის (სადაც $\delta > 0$) ღია ინტერვალი, რომ ყოველი $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ -სათვის, სადაც $x \in D$ და $x \neq x_0$ (ასეთი x -ები არსებობს, რადგან $x_0 = f$ ფუნქციის განსაზღვრის არის დაგროვების წერტილია), გვაქვს: $f(x) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ (იხ. ნახაზი ქვემოთ).



თუ შევნიშნავთ, რომ:

$$\begin{aligned} \text{ა) } (x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \text{ და } x \neq x_0) &\Leftrightarrow (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ და } x \neq x_0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-\delta < x - x_0 < \delta \text{ და } x \neq x_0) \Leftrightarrow (|x - x_0| < \delta \text{ და } x \neq x_0) \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta \end{aligned}$$

და

$$\text{ბ) } f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon) \Leftrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

ადვილად დავასკვნით, რომ ფუნქციის ზღვრის ზემოთ მოცემული განმარტება ეკვივალენტურია შემდეგი განმარტების.

10.2.3. ფუნქციის ზღვრის განმარტება „ეფსილონ-დელტა“ ენაზე¹:

ვთქვათ, x_0 არის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი.

A რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი ისეთი x -სათვის, სადაც $x \in D$ და $0 < |x - x_0| < \delta$, სამართლიანია უტოლობა: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

10.2.4. აღნიშვნა და ტერმინოლოგია. თუ A რიცხვი არის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში (სადაც x_0 არის D სიმრავლის დაგროვების წერტილი), წერენ:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

იკითხება: „ f ფუნქციის ზღვარი, როცა x მიისწრაფვის x_0 -საკენ, A -ს ტოლია“, ან „ A არის f ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში“.

10.2.5. შენიშვნა. x_0 წერტილში (სადაც x_0 არის D სიმრავლის დაგროვების წერტილი) f ფუნქციის ზღვრის არსებობა-არარსებობა დამოკიდებულია x_0 წერტილში f ფუნქციის ლოკალურ ყოფაცქევაზე.

უფრო ზუსტად, ვთქვათ, მოცემულია ორი f_1 და f_2 ფუნქცია, რომელთა განსაზღვრის არეები მოიცავენ $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ სახის (სადაც $\delta > 0$) რაიმე ღია ინტერვალს (შევნიშნოთ, რომ მაშინ x_0 წერტილი იქნება f_1 და f_2 ფუნქციების განსაზღვრის არეთაგან თითოეულის დაგროვების წერტილი). დავუშვათ, აგრეთვე, ყოველი $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ -სათვის, სადაც $x \neq x_0$, სამართლიანია ტოლობა: $f_1(x) = f_2(x)$ (სხვა სიტყვებით, ამ ფუნქციების მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა x_0 წერტილის შემცველი რაიმე ღია ინტერვალის ყოველ x წერტილში, გარდა, შესაძლებელია, თვით x_0 წერტილისა). ასეთ შემთხვევაში ზღვარი $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ზღვარი $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ და (ამ ზღვრების არსებობის შემთხვევაში) ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

10.3. არითმეტიკული მოქმედებები ზღვრებზე (სასრული ზღვრების შემთხვევა განსაზღვრის არის დაგროვების წერტილში).

10.3.1. თეორემა (ჯამის ზღვარი). ვთქვათ, x_0 არის ნამდვილი ცვლადის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ და $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციების განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი და დავუშვათ, არსებობს ზღვრები:

¹ ფუნქციის ზღვრის ეს განმარტება დაკავშირებულია ფრანგი მათემატიკოსის ლუი კოშის (1789 – 1857) სახელთან.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. მაშინ არსებობს x_0 წერტილში $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზღვარიც და სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ((f + g)(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

10.3.2. თეორემა (ნამრავლის ზღვარი). ვთქვათ, x_0 არის ნამდვილი ცვლადის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ და $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციების განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი და დავუშვათ, არსებობს ზღვრები: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. მაშინ არსებობს x_0 წერტილში $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზღვარიც და სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ((f \cdot g)(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right).$$

10.3.3. შენიშვნა. 10.3.8-დან და 10.2.4.1-დან გამომდინარეობს, რომ თუ x_0 არის ნამდვილი ცვლადის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი და არსებობს ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, მაშინ, ყოველი ნამდვილი λ რიცხვისათვის არსებობს x_0 წერტილში $\lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზღვარიც და სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ((\lambda f)(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

10.3.4. შენიშვნა (წრფივი კომბინაციის ზღვარი). 10.3.7-დან და 10.3.9-დან გამომდინარეობს, რომ თუ x_0 არის ნამდვილი ცვლადის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ და $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციების განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი და არსებობს ზღვრები $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი λ და μ რიცხვებისთვის არსებობს x_0 წერტილში $\lambda f + \mu g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის (რომელსაც f და g ფუნქციების წრფივი კომბინაცია ეწოდება) ზღვარიც და სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ((\lambda f + \mu g)(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

10.3.5. შენიშვნა. 10.3.10-დან გამომდინარეობს, რომ თუ x_0 არის ნამდვილი ცვლადის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ და $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციების განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი და არსებობს ზღვრები $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილში $f - g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზღვარიც და სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ((f - g)(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

10.3.6. შენიშვნა. მარტივად ჩანს, რომ თეორემები 10.3.7 და 10.3.8 სამართლიანია არა მხოლოდ ორი f და g ფუნქციისათვის, არამედ ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ფუნქციათა შემთხვევაშიც. უფრო ზუსტად, თუ x_0 არის ნამდვილი ცვლადის n -ცალი (სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) $f_1, \dots, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის საერთო განსაზღვრის D არის დაგროვების

წერტილი და არსებობს ზღვრები $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილში $f_1 + \dots + f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ და $f_1 \cdot \dots \cdot f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციების ზღვრებიც და სამართლიანია ტოლობები:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ((f_1 + \dots + f_n)(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ((f_1 \cdot \dots \cdot f_n)(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

10.3.7. თეორემა (შეფარდების ზღვარი). ვთქვათ, x_0 არის ნამდვილი ცვლადის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ და $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციების განსაზღვრის D არის დაგროვების წერტილი, სადაც ნებისმიერი $x \in D$ -სათვის, $g(x) \neq 0$. ვიგულისხმობთ, აგრეთვე, რომ არსებობს ზღვრები $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ და რომ,

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$. მაშინ არსებობს მაშინ არსებობს x_0 წერტილში $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზღვარიც და სამართლიანია ტოლობა:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

10.4. ცალმხრივი (სასრული) ზღვრები წერტილში.

10.4.1. განმარტება. ვთქვათ, x_0 არის $D \subset \mathbb{R}$ სიმრავლის ისეთი დაგროვების წერტილი, რომ ყოველი $c < x_0$ რიცხვისათვის $(c, x_0) \cap D \neq \emptyset$. ამბობენ, რომ A რიცხვი არის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის **მარცხენა** ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ ყოველი $x \in D$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $x_0 - \delta < x < x_0$, ადგილი აქვს უტოლობას: $|f(x) - A| < \varepsilon$. აღინიშნება:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

10.4.2. განმარტება. ვთქვათ, x_0 არის $D \subset \mathbb{R}$ სიმრავლის ისეთი დაგროვების წერტილი, რომ ყოველი $c > x_0$ რიცხვისათვის $(x_0, c) \cap D \neq \emptyset$. ამბობენ, რომ A რიცხვი არის $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის **მარჯვენა** ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ ყოველი $x \in D$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $x_0 < x < x_0 + \delta$, ადგილი აქვს უტოლობას: $|f(x) - A| < \varepsilon$. აღინიშნება:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

10.4.3. შენიშვნა. თუ A არის f ფუნქციის მარცხენა ან მარჯვენა ზღვარს x_0 წერტილში f ფუნქციის ცალმხრივ ზღვრებს უწოდებენ.

10.4.4. შენიშვნა. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ზღვარი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს f ფუნქციის როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა ზღვარი x_0 წერტილში და ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია. გარდა ამისა, თუ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, მაშინ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ და პირიქით, თუ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, მაშინ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

10.5. საპარაფრაზოები.

10.5.1. შეამოწმეთ, რომ $x=0$, $x=1$ და $x=2$ წერტილები წარმოადგენენ $(0; 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$ სიმრავლის დაგროვების წერტილებს. მიუთითეთ $(0; 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$ სიმრავლის ყველა დაგროვების წერტილთა სიმრავლე. აღწერეთ ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც არ წარმოადგენენ $(0; 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$ სიმრავლის დაგროვების წერტილებს. გააჩნია თუ არა $(0; 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$ სიმრავლეს იზოლირებული წერტილები?

10.5.2. რამდენი დაგროვების წერტილი გააჩნია $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ სიმრავლეს? გააჩნია თუ არა $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ სიმრავლეს იზოლირებული წერტილები?

10.5.3. შეამოწმეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძის არც ერთი წერტილი არ წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლის დაგროვების წერტილს. მიუთითეთ $\mathbb{N}$ სიმრავლის ყველა იზოლირებულ წერტილთა სიმრავლე.

10.5.4. შეამოწმეთ, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლის დაგროვების წერტილია. გააჩნია თუ არა $\mathbb{Q}$ სიმრავლეს იზოლირებული წერტილები?

10.5.5. დარწმუნდით, რომ ნებისმიერი სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი ან ამ სიმრავლის დაგროვების, ან მისი იზოლირებული წერტილია.

10.5.6. დაამტკიცეთ, რომ თუ x_0 არის D სიმრავლის დაგროვების წერტილი, მაშინ x_0 წერტილის ნებისმიერ ε -მიდამოს თანაკვეთა D სიმრავლესთან უსასრულო სიმრავლეა, ანუ, x_0 წერტილის ნებისმიერ ε -მიდამოში არსებობს D სიმრავლის უსასრულო „რაოდენობის“ წერტილები.

10.5.7. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + x - 8)$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 0} ((2x+1)\cos x)$; გ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1+x^5}{5x^2-3}$; დ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{x^2-1}$; ე) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

10.5.8. ჩამოაყალიბეთ, რას ნიშნავს, რომ რიცხვი A არ არის $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზღვარი D სიმრავლის დაგროვების x_0 წერტილში.

10.5.9. დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x < 0 \\ 2, & \text{თუ } x = 0 \\ 3, & \text{თუ } x > 0 \end{cases}$ ფუნქციას არ გააჩნია ზღვარი $x=0$ წერტილში.

10.5.10. მოიყვანეთ ისეთი $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის მაგალითი, რომელსაც არცერთ წერტილში არ გააჩნია ზღვარი.

10.5.11. იპოვეთ: ა) $\lim_{x \rightarrow 1} |x|$; ბ) $\lim_{x \rightarrow -1} |x|$; გ) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$.

10.5.12. არსებობს თუ არა სასრული ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)$? პასუხი დაასაბუთეთ.

10.5.13. დაამტკიცეთ, რომ: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos \frac{1}{x} \right) = 0$.

10.5.14. შეამოწმეთ, რომ თუ f ფუნქციას გააჩნია ზღვარი მისი განსაზღვრის არის დაგროვების x_0 წერტილში, მაშინ ეს ზღვარი ერთადერთია. სხვა სიტყვებით, თუ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, მაშინ A და B რიცხვები ერთმანეთის ტოლია ($A = B$).

10.5.15. (იხ. სავარჯიშო 10.5.9). განვიხილოთ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც განმარტებულია შემდეგი წესის მიხედვით:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x < 0; \\ 2, & \text{თუ } x = 0; \\ 3, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

ა) იპოვეთ f ფუნქციის მარცხენა ზღვარი $x = 0$ წერტილში.

ბ) იპოვეთ f ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი $x = 0$ წერტილში.